

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Радіотехнічний факультет
Кафедра радіоприймання та оброблення сигналів

Конспект лекцій

до кредитного модулю «Спеціальні розділи оброблення сигналів 2»

для магістрів радіотехнічного факультету,
спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка
спеціалізації «Радіозв'язок та оброблення сигналів»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2017

Конспект лекцій до кредитного модулю «Спеціальні розділи оброблення сигналів 2» для магістрів радіотехнічного факультету, спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка, спеціалізації «Радіозв'язок та оброблення сигналів» / Уклад.: І.О. Сушко, Н.О. Лащевська, А.В. Мовчанюк, Р.В. Антипенко — К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. — 172 с.

Гриф надано вченою радою радіотехнічного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського
(Протокол № 09/2017 від 25.09.2017)

Рекомендовано навчально-методичною комісією радіотехнічного факультету
(Протокол № 09/2017 від 22.09.2017)

Навчальне видання

Конспект лекцій
до кредитного модулю
«Спеціальні розділи оброблення сигналів 2»
для магістрів радіотехнічного факультету,
спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка
спеціалізації «Радіозв'язок та оброблення сигналів»

Укладачі: *Ірина Олександрівна Сушко, доцент*
Наталія Олександрівна Лащевська, доцент
Андрій Валерійович Мовчанюк, доцент
Руслан Володимирович Антипенко, доцент

Рецензент: *Неуймін Олександр Станіславович, к.т.н.,*
доцент кафедри радіотехнічних пристроїв і систем
КПІ ім. Ігоря Сікорського

За редакцією укладача

КПІ ім. Ігоря Сікорського
Радіотехнічний факультет
03056, Київ, вул. Політехнічна, 12, корп. 17
Тел./факс (044) 204-94-23

ЗМІСТ

1. ЗАДАЧА РЕСТАВРАЦІЇ СИГНАЛІВ	4
1.1 Вступні зауваження	4
1.2 Ідентифікація імпульсної характеристики	6
1.3 Ідентифікація шуму	7
1.4 Дискретизація сигналів	9
1.5 Розв'язання задачі реставрації в натуральних координатах за відсутності шуму	13
1.6 Дискретне перетворення Фур'є	15
1.7 Дискретні перетворення з дійсним ядром	17
1.7.1 Вступні зауваження	17
1.7.2 Перетворення Уолша	17
1.7.3 Деякі властивості ортогональних перетворень	19
1.7.4 Косинусне перетворення	20
1.8 Реставрація образів за методом умовної деконволюції	25
1.8.1 Умовна деконволюція в області натуральних координат	25
1.8.2 Умовна деконволюція в області трансформант Фур'є	32
1.9 Дискретна фільтрація за методом найменших квадратів	38
РОЗДІЛ 2. НОРМАЛІЗАЦІЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ. НОРМАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ	42
2.1.1 Нормалізація дискретного ортогонального перетворення	43
2.1.2 Нормалізація тестового сигналу за рівнем	46
2.2 Нормальне перетворення тестового сигналу	50
2.2.1 Нормальне одновимірне перетворення	50
2.2.1.1 Матричний оператор дискретного нормального перетворення першого виду	50
2.2.1.2 Матричний оператор дискретного нормального перетворення другого виду	61
2.2.2 Алгоритм безпосереднього формування матричного оператора нормального перетворення	68
РОЗДІЛ 3. ВІКОННА ОБРОБКА СИГНАЛІВ. ЛОКАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є	78
3.1. Віконна обробка сигналів	78
3.1.1. Стаціонарні та нестаціонарні сигнали	78
3.1.2. Віконна обробка сигналів	80
3.2. Локальне перетворення Фур'є. Аналіз із сталою роздільною здатністю	81
3.3. Вейвлет перетворення. Аналіз із змінною роздільною здатністю	83
3.3.1. Неперервне вейвлет перетворення	83
РОЗДІЛ 4. РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ З ВИКОРИСТАННЯМ НОРМАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЗА КРИТЕРІЄМ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ	89

4.1 Вступні зауваження.....	89
4.2 Алгоритм аутентифікації.....	89
4.3 Приклади роботи алгоритму аутентифікації.....	91
4.4 Розпізнавання образу за критерієм максимальної правдоподібності.....	96
4.4.1 Розклад матриці на її власні значення та власні вектори.....	97
4.4.2 Навчання класифікатора максимальної правдоподібності та модифікований метод розпізнавання образів.....	98
4.4.3 Алгоритм класифікації з уточненням. Зв'язок між нормальним класифікатором та класифікатором за критерієм максимальної правдоподібності.....	100
4.5 Лінійний погоджений фільтр.....	103
4.5.1 Сигнал та шум на виході погодженого фільтру.....	104
4.5.2 Цифровий погоджений фільтр.....	105
4.6 Недоліки погоджених класичних фільтрів.....	108
4.7 Косинусний фільтр.....	110
4.8 Порівняння лінійної погодженої фільтрації та нормальної фільтрації.....	111
4.9 Висновки.....	122
РОЗДІЛ 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ. РІЗНИЦЕВІ ТА СПЕКТРАЛЬНІ МЕТОДИ.....	124
5.1 Вступні зауваження.....	124
5.3. Розв'язання диференційних рівнянь в області спектрів дискретних перетворень з дійсним ядром.....	128
5.4. Різницеві методи розв'язання лінійних диференційних рівнянь.....	130
5.5. Оператор диференціювання в області трансформант перетворення Уолша-Адамара при природному впорядкуванні базисних функцій.....	132
5.7. Аналіз лінійної системи при ортогональному розкладі матричного оператора диференціювання на власні вектори та власні числа.....	135
5.8 Алгоритм розв'язання лінійних диференційних рівнянь в області трансформант перетворення Уолша-Адамара при впорядкуванні базисних функцій за Адамаром.....	138
5.9. Висновки.....	145
РОЗДІЛ 6. НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ (СИСТЕМИ, ЩО ІМІТУЮТЬ МИСЛЕННЯ).....	147
6.1 Основні характеристики головного мозку людини.....	147
6.2. Модель нейрону.....	148
6.3. Найпростіші штучні нейронні мережі.....	149
6.3.1. Загальні зауваження.....	149
6.3.2. Поодинокий нейрон.....	152
6.3.2.1. Алгоритм Гейбба.....	152

6.3.2.2. Алгоритм Відроу (Widrow).....	155
6.4. Односпрямовані нейронні мережі	156
6.4.1. Архітектура односпрямованих нейронних мереж	156
6.4.2. Класифікаційні можливості односпрямованих багатошарових перцептронів.....	159
6.5. Навчання мережі зворотним поширенням похибок.....	161
ЛІТЕРАТУРА.....	168

1. ЗАДАЧА РЕСТАВРАЦІЇ СИГНАЛІВ

1.1 Вступні зауваження

В сучасній техніці проблема обробки сигналів, спотворених внаслідок їх передачі каналами зв'язку (із притаманними цим каналам перешкодами та шумами), а також внаслідок не ідеальності пристроїв приймання та передачі, є однією із найважливіших.

Моделлю деградації (спотворення) образу (одновимірною чи двовимірною) є в загальному випадку нелінійні та анізотропні оператори. Але в такому вигляді задача оброблення сигналу з метою придушення шумів та корекції спотворень аналітично може бути розв'язана не завжди, а у випадку її розв'язання математичний апарат і апаратурні витрати стають не сумірно великими у порівнянні з досягнутим результатом. Тому, як правило, систему прийому-передачі сигналу вважають **лінійною**, а **шум адитивним** (що на сучасному рівні апаратурного забезпечення і вимог для систем обробки є достатнім).

В такому разі спотворений образ $L(x, y)$ можна описати рівнянням

$$L(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, x', y') \times f(x', y') dx' dy' + V(x, y), \quad (1.1)$$

де $g(x, y, x', y')$ – результуюча імпульсна характеристика каналу прийому-передачі; $f(x', y')$ – сигнал, що його передають; $V(x, y)$ – адитивний шум, x, y – відповідні просторові координати.

Інтеграл (1.1) має загальний вигляд лінійної суперпозиції, але в ньому імпульсна характеристика залежить від координат x, y (тобто для різних координат буде різною). Це свідчить про те, що інтеграл (1.1) описує лінійну **анізопланарну** систему. Гіпотеза про лінійність на практиці часто теж не відповідає дійсності. Тому для використання моделі (1.1) систему слід попередньо лінеаризувати (наприклад експоненціальним або іншим перетворенням). Також і представлення шуму лише своєю адитивною складовою в багатьох випадках не відповідає дійсності, що викликає необхідність додаткових зусиль по створенню відповідних апаратурних засобів.

У багатьох практично важливих випадках можна вважати (хоча б у наближенні), що імпульсна характеристика інваріантна відносно координат x, y (для процесів вона завжди інваріантна у часі), тобто модель деградації образу (одновимірною чи двовимірною) є **ізопланарною**. Тоді модель (1.1) перетворюється у двовимірний інтеграл згортки (інтеграл Дюамеля)

$$L(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y, x' - y') \times f(x', y') dx' dy' + V(x, y), \quad (1.2)$$

У подальшому будемо використовувати, в основному, цю модель, або (у випадку одновимірних сигналів) одновимірний інтеграл

$$L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) \times f(\tau) d\tau + V(t). \quad (1.3)$$

Моделі деградації (спотворення) образу (1.2), (1.3) описують процес спотворення ідеального образу $f(x,y)$. Якщо імпульсна характеристика $g(x,y)$ або $g(t)$ не є δ -імпульсом Дірака, то навіть при відсутності адитивного шуму одержаний образ $L(x,y)$ суттєво відрізняється від вихідного сигналу $f(x,y)$. Тому основною задачею обробки є отримання оцінки $\hat{f}(x,y)$ сигналу $f(x,y)$, яка певним чином співпадає з цим сигналом. Міру співпадіння або неспівпадіння обирають за певним **об'єктивним математичним критерієм**, який **суб'єктивно вибирають** внаслідок наявності великої кількості таких критеріїв.

Задачу оброблення сигналів $L(x,y)$ з метою отримання оцінки $\hat{f}(x,y)$ звичайно називають задачею **реставрації**.

Така задача полягає у пошуку оцінки $\hat{f}(x,y)$ за наявності деякої апріорної (наперед відомої) інформації. У випадку моделі (1.2) задачу реставрації можна сформулювати наступним чином:

за відомими (апріорі) $g(x,y)$, $L(x,y)$ та характеристиками шуму $V(x,y)$ знайти наближення $\hat{f}(x,y)$ до $f(x,y)$.

Що стосується імпульсної характеристики, то її часто можна виміряти або розрахувати детерміновано. Конкретна реалізація шуму зазвичай невідома, тому для шуму часто обмежуються середньостатистичними характеристиками. Звичайний образ $L(x,y)$ можна розглянути і як детермінований, і як певну реалізацію випадкового поля.

Різні методи реставрації значно відрізняються щодо рівня точності опису поодиноких членів моделі (1.2).

Слід особливо наголосити, що успіх процедури реставрації значною мірою залежить від наявності та точності апріорної інформації про причини спотворення (деградації) образу (імпульсна характеристика $g(x,y)$, інформація про шум $V(x,y)$, певні відомості про реставрований образ). Тому велике значення має ідентифікація відповідних характеристик системи деградації образу (системи відображення, яка не є ідеальною).

1.2 Ідентифікація імпульсної характеристики

Для моделі деградації (1.2) найважливішою характеристикою є імпульсна характеристика $g(x,y)$, яка і визначає втрату чіткості відображеного образу. Причини втрати чіткості можуть бути різноманітними і тому імпульсну характеристику не завжди можна виміряти. Тому ідеальним способом визначення імпульсної характеристики слід було б вважати її аналітичне виведення з моделі системи відображення.

Так, наприклад, втрату чіткості за рахунок дифракції оптичного образу впливом вхідного отвору діаметром D , що можна описати формулою

$$P(x,y) = \begin{cases} 1 - \text{усередині кругового отвору} \\ 0 - \text{поза отвором} \end{cases},$$

з урахуванням імпульсної характеристики

$$g(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x,y) \times P(x\Delta\lambda \times d \times u, y\Delta\lambda \times d \times v) dx dy.$$

Тут λ – довжина хвилі світла (сигналу носія інформації); d – відстань між площиною образу і отвором.

В ряді випадків ізотропну втрату чіткості з розумною точністю можна апроксимувати Гауссовим законом

$$g(x,y) = k_1 \times \exp \{ \Delta k_r \times r^2 \},$$

де r – відстань від центру кривої; k_1 і k_r – константи, які можна знайти при апроксимації вимірювань.

Так само можна апроксимувати втрату чіткості за рахунок розфокусування або за рахунок турбулентності атмосфери, для чого слід використовувати вираз

$$g(x,y) = k_1 \times \exp \{ \Delta (k_2 \times x^2 + k_3 \times y^2)^{5/6} \}.$$

Якщо поле образу ізотропне, то $k_2 = k_3$.

При реставрації образів, спотворених за рахунок паразитних рухів об'єкту відображення або системи зчитування образу (наприклад, в медичних застосуваннях – скіаграфія, класична РТГ томографія) можливим є отримання аналітичного виразу $g(x,y)$. Нехай рух описується посувом осі об'єкта відображення, в площині образу, причому кожна точка осі описує довільну траєкторію. Наприклад, координати початку осі (x_0, y_0) при русі змінювалися у відповідності до виразів

$$x_0 = a(t); y_0 = b(t).$$

Тоді нечіткий («розмазаний») образ описується виразом

$$L(x,y) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x - a(t), y - b(t)) dt,$$

де T – час експозиції.

При переході до частотної області можна показати, що в цьому випадку має місце спотворення, яке має характер конволюції (1.2), (1.3), тобто

$$L(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j(ux+vy)} \int_{-T/2}^{T/2} f(x-a(t), y-b(t)) dt) dy \right] dx.$$

Заміною послідовності інтегрування та введенням підстановки

$$x-a(t) = \xi; y-b(t) = \eta$$

Отримаємо

$$L(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \times e^{-j(u\xi+v\eta)} d\xi d\eta \times \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(ua(t)+vb(t))} dt = F(u,v) \times G(u,v),$$

або

$$L(x,y) = f(x,y) * g(x,y).$$

В багатьох важливих випадках, на жаль, механізми втрати чіткості (еквівалентного розфокусування) настільки складні, що неможливо отримати задовільні моделі, які б дали змогу аналітично описати імпульсну характеристику деградації $g(x,y)$. Тому немає іншого виходу, як спиратися на вимірювання, які у подальшому слід обробити та узагальнити.

В деяких випадках імпульсну характеристику можна отримати експериментально відображенням фантома (моделі), створеного «точковими» джерелами (такими «малими», що їх розмірами у порівнянні до графоелементів зображення можна знехтувати). Аналогічно зі спотвореного образу можна знайти (апостеріорі) імпульсну характеристику $g(x,y)$, якщо у неспотвореному образі були точкові джерела (наприклад, зірки в астрономічних фотографіях, «точкові цілі» в ультразвуковій томографії тощо). Але така ситуація є швидше виняткова.

1.3 Ідентифікація шуму

Різнноманітні методи реставрації суттєво відрізняються вимогами до інформації про шум. Таким чином, вибір того чи іншого методу реставрації суттєво залежить від доступної інформації про шум.

Шумову функцію $V(x,y)$ в конкретному образі $L(x,y)$ вважаємо реалізацією випадкового поля. Тому опис шуму є описом цього поля, оскільки для окремих реалізацій будь-яка статистична інформація відсутня.

Повним описом двовимірного випадкового поля є багатовимірною щільність імовірностей (розмірність відповідає кількості елементів в матриці образу). Цей опис є дуже громіздким, потребує значних зусиль для його отримання і внаслідок цього є непридатним для використання на практиці. Тому обмежуються лише деякими параметрами цього розподілення, які можна на практиці визначити.

З точки зору ідентифікації шуму було б зручно отримати якнайбільшу кількість його реалізацій, незалежних від образу. Тоді виникає можливість обчислювати характеристики шуму **за ансамблем реалізацій**, зокрема такі середні значення, як математичне очікування

$$\mu(x,y) = M \{V(x,y)\},$$

дисперсія

$$\sigma_v^2(x,y) = M \{(V(x,y) - \mu(x,y))^2\}$$

як функції координат (x,y) та автокореляційна функція

$$R_{vv}(x_1, y_1, x_2, y_2) = M \{V(x_1, y_1), V(x_2, y_2)\},$$

де $M\{.\}$ – оператор математичного очікування.

На базі такого аналізу вже можна робити висновки про можливу однорідність (гомогенність) та ергодичність шумового поля. Оцінка середніх по ансамблю реалізацій, як відомо, є процедурою досить громіздкою. До того ж в багатьох випадках достатньо велика (репрезентативна) вибірка реалізацій не може бути отримана або відсутня. Особливо трудомісткою є обчислення автокореляційної функції шуму та взаємно кореляційної функції між шумом та образом за ансамблем.

Тому часто буває потрібно зробити деякі **апріорні припущення** (гіпотези) про характер шуму. Тестування вірності таких гіпотез є часто дуже громіздким і таке тестування звичайно служить підставою для висновків про довіру результатам реставрації. Базовим припущенням звичайно є припущення про **гомогенність** (однорідність) шуму, який в такому випадку можна характеризувати середнім значенням (математичним очікуванням) μ та розсіянням (дисперсією) σ^2 , значення яких не залежить від координат (x,y) , та автокореляційною функцією $R_{vv}(\Delta x, \Delta y)$. Альтернативою до автокореляційної функції є **спектральна густина потужності шуму**

$$S_{vv} = F \{R_{vv}(\Delta x, \Delta y)\}.$$

З припущення про гомогенність шуму автоматично витікає припущення про незалежність шуму та образу (що, насправді, не завжди виконується).

У випадку, коли в наявності є тільки одна реалізація шуму (один спотворений образ), не залишається нічого іншого, ніж припустити ще й **ергодичність** шумового поля. Тобто можна припустити, що середні значення за ансамблем, яке апроксимує μ , σ^2 та R_{vv} , є середніми значеннями по **просторовим координатам** в площині образу.

Часто взагалі не існує жодної реалізації саме шуму, що примушує аналізувати ділянки вже отриманого спотвореного образу, де (на думку дослідника) графоеlementи образу відсутні, тобто шуму на фоні постійних за

інтенсивністю ділянок образу. Ясно, що в таких випадках ідентифікувати шум можна тільки на базі гіпотези про його ергодичність.

З точки зору математичних обґрунтувань методів реставрації зручно (якщо це можливо) апроксимувати шум «білим шумом» (з постійним спектром) та іноді нормальним розподіленням його миттєвих випадкових значень. Багато з існуючих методів реставрації базуються саме на таких припущеннях. Але в кожному конкретному випадку слід оцінити, чи такі спрощуючі припущення не обмежують клас образів, які можна реставрувати.

1.4 Дискретизація сигналів

Задача пошуку оцінки $\hat{f}(t)$ у натуральних координатах за відомими $L(t)$ та $g(t)$ в моделі (1.3) навіть при відсутності шуму є складною. Так форму довольного сигналу $L(t)$ зазвичай не можна описати точною аналітичною формулою. Те ж саме у випадку складної лінійної системи можна сказати і про імпульсну характеристику $g(t)$, якщо її вимірюють, а не розраховують. Тому розв'язок задачі пошуку $\hat{f}(t)$ за $g(t)$ та $L(t)$ звичайно є наближеним (самі характеристики $g(t)$ та $L(t)$ знімають «за точками» з певним, зазвичай сталим, кроком Δt , тобто **еквідистантно**). Тому має сенс для розв'язання задачі обробки сигналів (реставрації) використовувати математичний апарат дискретних перетворень. При дискретизації довольного сигналу $s(t)$ (рис.1.1,а) з постійним кроком Δt δ -імпульсами Дірака (вага δ -імпульсу в точці $n\Delta t$ на осі часу дорівнює миттєвому значенню сигналу в цій точці – рис.1.1,б). З рис. 1.1,б видно, що при дискретизації втрачається частина інформації про сигнал. При цьому відновлення сигналу $s(t)$ за відліками $s_\delta(n\Delta t)$ залежить від закону, за яким апроксимують інтервали функції між відліками. Так, якщо на інтервалі $t \in (n\Delta t, (n+1)\Delta t)$ апроксимувати функцію $s(t)$ миттєвими значеннями $s(n\Delta t)$, виникає похибка (зафарбовані ділянки на рис.1.1,в). Похибку можна зменшити, зменшивши крок дискретизації. Але це призведе до збільшення кількості відліків сигналу, що ускладнить подальший розрахунок. Таким чином, доцільно шукати компроміс між зменшенням кроку дискретизації, що призведе до збільшення точності, і ускладненням розрахунків, викликаних збільшенням кількості відліків на тому самому інтервалі.

Розв'язати цю задачу дозволяє обмеження на точність, яке можна ввести, виходячи із того, яку частину інформації, зосереджену в сигналі, вважати **несуттєвою (ірелевантною)**.

Пояснимо те, що можна вважати несуттєвою складовою інформації (для кожного класу задач при тому самому сигналі вона може бути різною, що встановлюють на базі експертних оцінок) на прикладі сигналу рис.1.1,а.

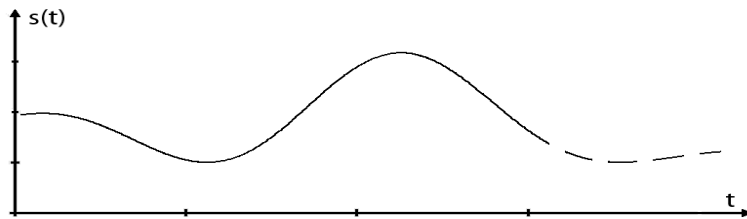


Рис.1.1,а

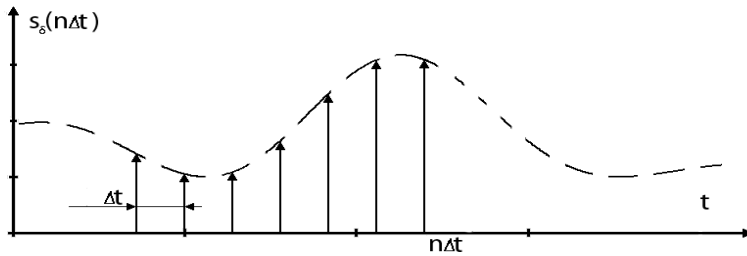


Рис.1.1,б

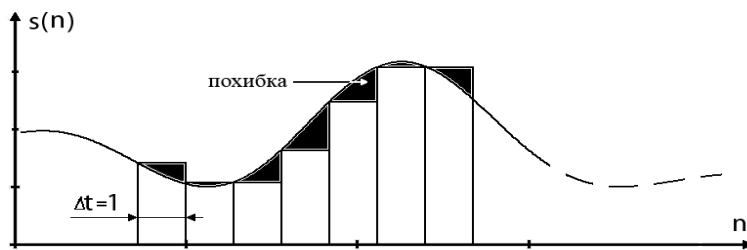


Рис.1.1,в

Кожний сигнал має обмежену довжину (є **фінітним у часі**). Тоді, як відомо, його спектр Фур'є є нескінченним вздовж осі частот. З іншого боку, спектр сигналу завжди є обмеженим по частоті, що є наслідком хоча б обмеженої частотної робочої смуги каналу зв'язку та пристроїв приймання-передавання, або за рахунок примусового обмеження (наприклад при розрахунках). Тоді спектр сигналу обмежують верхньою граничною частотою, такою, що (за експертними оцінками) потрібна для подальших висновків частина інформації не зменшується.

При цьому, як відомо, **фінітний спектр** відповідає нескінченному у часі сигналу. Обмеження спектру у свою чергу призводить до появи коливань навколо вихідного сигналу $s(t)$ (ефект Гіббса). Якщо верхню граничну межу знайдено коректно (суттєва частина інформації не зменшена), то можна відновити із великою точністю усі проміжні значення сигналу між відліками (але не для вихідного сигналу $s(t)$, а для його наближення $\tilde{s}(t)$ зі смугою, обмеженою верхньою граничною частотою).

Для такого сигналу $\tilde{s}(t)$ вибір максимально можливого кроку дискретизації Δt_{max} можна виконати за теоремою Шеннона-Котельникова, з

якої відомо, що $\Delta t_{max} = 2\pi/2\omega_B$, тобто частота дискретизації ($\Omega=2\pi/\Delta t$) повинна бути не менша, ніж подвоєна гранична частота ω_B . На рис.1.2.б зображено обмежений частотою ω_B спектр сигналу $s(t)$, а на рис.1.2.в,г – спектр дискретизованого сигналу $\tilde{s}(t)$ з кроками дискретизації $\Delta t_1 > \Delta t_{max}$ та $\Delta t_2 < \Delta t_{max}$ відповідно. Ясно, що коли відліки спектру дискретного сигналу $\tilde{s}_\delta(n\Delta t)$ накладаються один на одний (заштрихована частина графіка), то відновити ідеальним фільтром нижніх частот (ФНЧ) спектр сигналу $\tilde{s}(t)$ з послідовності спектрів (рис.1.2.в) неможливо, на відміну від випадку послідовності спектрів рис.1.2.г.

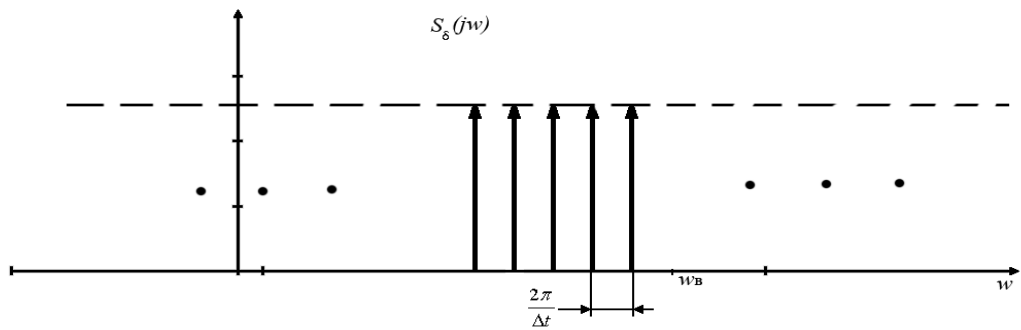


Рис.1.2, а

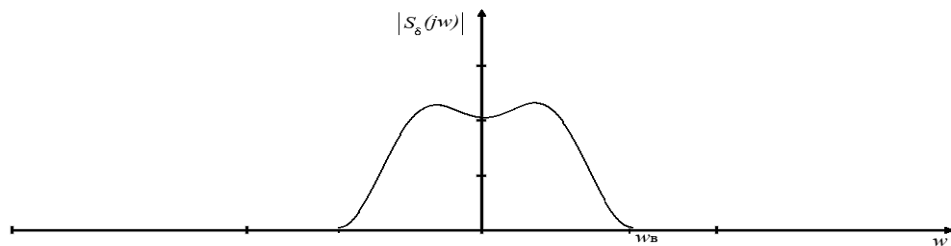


Рис.1.2,б

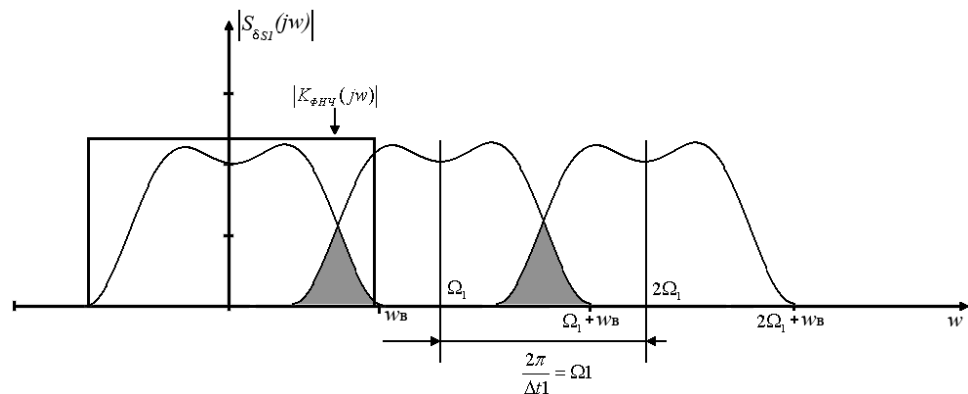


Рис.1.2,в

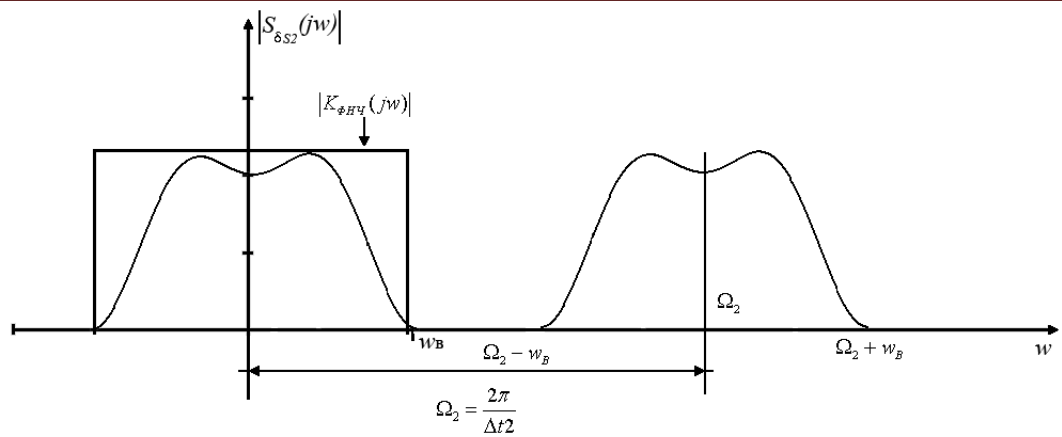


Рис.1.2z

Розглянута послідовність спектрів рис.1.2.в,г є періодичною з періодом $\Omega=2\pi/\Delta t$, якщо дискретизацію виконувати за допомогою δ -імпульсів. В цьому випадку можна процедуру дискретизації представити як множення сигналу $s(t)$ на періодичну послідовність δ -імпульсів, спектр якої наведено на рис.1.2,а. Тобто таку періодичну послідовність можна записати рядом Фур'є у вигляді

$$P_{\delta} = 1/T + \sum_{i \neq 0}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta t} t\right). \quad (1.4)$$

За теоремою про множення на косинусоїду: якщо $s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$, то

$$s(t) \cos \omega_i t \leftrightarrow \frac{1}{2} [S(j(\omega - \omega_i)) + S(j(\omega + \omega_i))],$$

що й дає періодичне розмноження (рис.1.2,в,г) спектра (рис.1.2,б).

У випадку апроксимації сигналу прямокутниками (рис.1,в) періодичний спектр (рис.1.2,в,г) слід ще помножити на частотозалежний множник

$$F(j\omega) = K_0 \frac{\sin(\omega \Delta t / 2)}{\omega \Delta t / 2}, \quad (1.5)$$

що при «великих» Δt приведе до додаткових спотворень спектральних пелюстків.

Таким чином, спектр поодинокого, дискретизованого (δ -функціями) сигналу має періодичний характер (рис.1.3,б). Як відомо, спектр будь-якої періодичної послідовності має лінійчастий (дискретний) вигляд (рис.1.3,а), а спектр періодичної послідовності дискретних імпульсів має лінійчастий періодичний вигляд (рис.1.3,в).

Тобто будь-яка дискретизація сигналу при обчисленні його дискретного спектру завжди відповідає уявному періодичному розмноженню цього сигналу при дискретному періодичному спектрі цього сигналу.

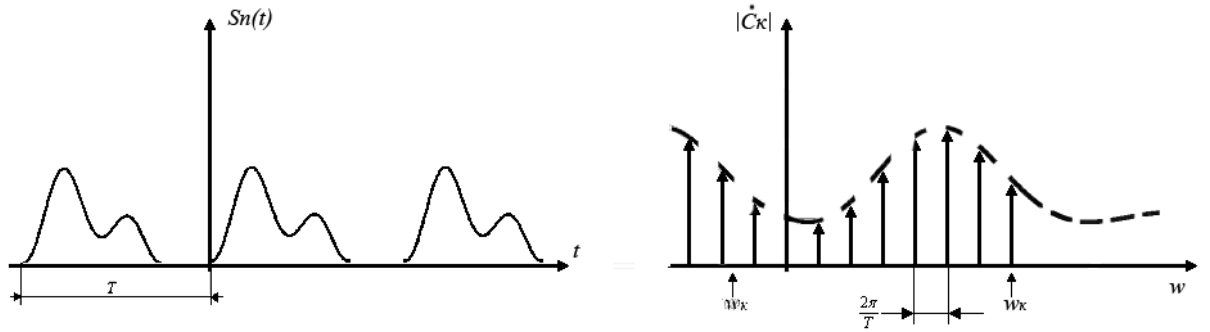


Рис.1.3,а

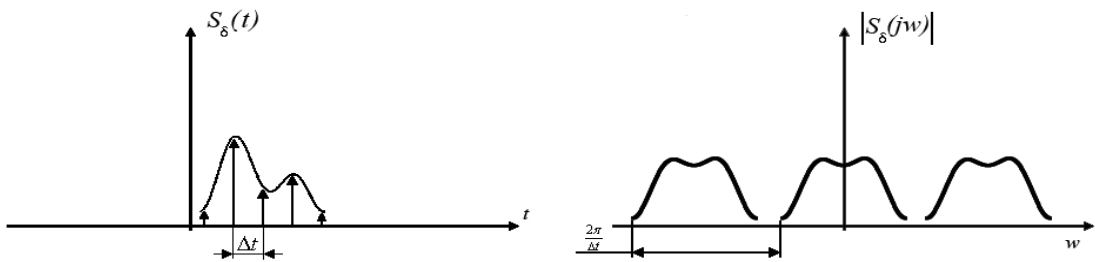


Рис.1.3,б

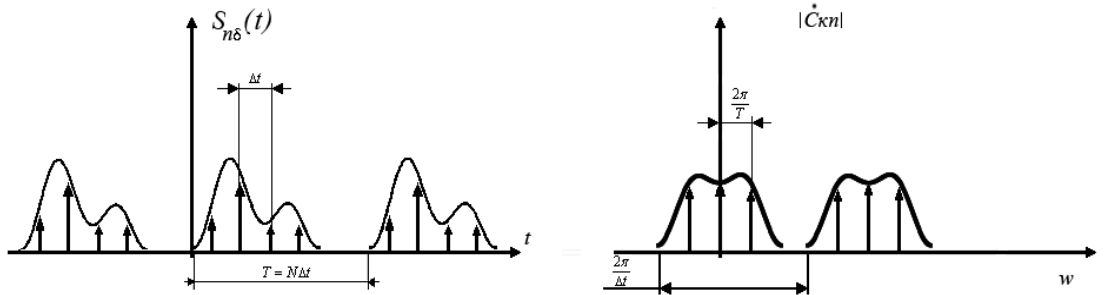


Рис.1.3,в

1.5 Розв'язання задачі реставрації в натуральних координатах за відсутності шуму

Покажемо тепер, як за допомогою дискретизації сигналів можна знайти сигнал $\hat{f}(t)$ в моделі деградації (1.3). Для цього перепишемо інтеграл, підставивши замість t відлік $k\Delta t$ замість $\tau - n\Delta t$. При цьому інтеграл замінено сумою, а диференціал dt – кроком Δt

$$L(k\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k\Delta t - n\Delta t) \times f(n\Delta t) \times \Delta t. \quad (1.6)$$

Якщо «довжина» імпульсної характеристики становить $M\Delta t$, а шуканого сигналу $N\Delta t$, то після нормування кроку ($\Delta t = 1$) одержимо

$$L(k) = \sum_{i=0}^{M+N-1} g(k-n) \times f(n), \quad (1.7)$$

що й є загальною формою дискретної згортки.

В матричному записі (1.7) можна подати у вигляді

$$\bar{L} = \bar{\bar{G}} \times \bar{f} \quad (1.8)$$

де $\bar{\bar{G}}$ – дискретний оператор згортки. Дві риски над $\bar{\bar{G}}$ означають, що матриця $\bar{\bar{G}}$ квадратна, одна рисочка над \bar{L} і \bar{f} , що це – стовпці,

$$\bar{L}^T = \begin{bmatrix} L(0) & L(1) & L(2) & \dots & L(M+N-1) \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}^T = \begin{bmatrix} f(0) & f(1) & f(2) & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{G}} = \begin{bmatrix} g(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g(2) & g(1) \\ g(1) & g(0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & g(2) \\ g(2) & g(1) & g(0) & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(2) & g(1) & g(0) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(2) & g(1) & g(0) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g(2) & g(1) & g(0) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

де для визначеності обрано $M=3$.

Тоді, для дискретної апроксимації (1.8) моделі (1.3) сигнал \bar{f} можна знайти за простою формулою

$$\bar{f} = \bar{\bar{G}}^{-1} \times \bar{L}, \quad (1.10)$$

для чого обернути матрицю дискретного оператора згортки $\bar{\bar{G}}$.

Розглянутий приклад демонструє великі можливості, які надає математичний апарат, пов'язаний з дискретизацією моделей.

Звичайно, розглянуту задачу реставрації сигналу можна було б розв'язати в аналітичному вигляді (при наявності аналітичної формули для $L(t)$, $g(t)$), використовуючи перетворення Фур'є.

За теоремою про згортку оригіналів

$$L(t) = g(t) * f(t) \leftrightarrow G(j\omega) \times F(j\omega) = L(j\omega), \quad (1.11)$$

де $L(j\omega)$, $G(j\omega)$ та $F(j\omega)$ перетворенні Фур'є для функцій $L(t)$, $g(t)$, $f(t)$ відповідно.

Тоді, для області спектрів Фур'є

$$F(j\omega) = L(j\omega) / G(j\omega), \quad (1.12)$$

$$f(t) = F^{-1}\{F(j\omega)\}, \quad (1.13)$$

де $F^{-1}\{F(j\omega)\}$ – оператор зворотного перетворення Фур'є.

На жаль, обчислення зворотного перетворення Фур'є (навіть для простих аналітичних виразів) викликає значні складності. Тому інтеграл зворотного перетворення Фур'є слід було б розраховувати за наближеними формулами, що знову призводить до дискретизації.

Але, як видно з виразу (1.12), використання формул для обчислення спектру сигналу $f(t)$ значно простіші, ніж розв'язання тієї самої задачі в

натуральних координатах. Тому часто доцільніше витратити певні зусилля для пошуку спектрів, розв'язувати задачу в області перетворення Фур'є і робити зворотне перетворення, аніж шукати розв'язок задачі в натуральних координатах.

Отже, великого значення набувають методи обчислення прямого та зворотного перетворення Фур'є.

1.6 Дискретне перетворення Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є можна отримати з відомих функціоналів аналітичного прямого і зворотного перетворень

$$S(j\omega) = F\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.14a)$$

$$s(t) = F^{-1}\{S(j\omega)\} e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.14b)$$

При цьому, час t замінюється на дискретні відліки $n\Delta t$, довжина періоду $T = N\Delta t$. Тоді частота $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t}$; $\omega_k = 2\pi/N \Delta t$, а комплексне ядро перетворення $e^{-j\omega t}$ замінимо на $e^{-j(\frac{2\pi}{N\Delta t})kn\Delta t} \rightarrow e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn}$ (має місце нормування часу $\Delta t = 1$ та частоти $\Omega_1 = 2\pi/N$). Отже, оператори прямого та зворотного дискретного перетворення Фур'є мають вигляд

$$S_{\omega}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s_t(n) e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad (1.15a)$$

$$s_t(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_{\omega}(k) e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (1.15b)$$

У виразах (1.15) враховано, що формати перетворень (кількість дискретних відліків у часі і дискретних частот) співпадають і дорівнюють $N=2^m$; m – ціле число. Звичайно (залежно від розв'язуваної задачі) $N \geq 32$ і може досягати значень 1024...2048 і т.д. В матричній формі запису оператори прямого та зворотного перетворення Фур'є мають вигляд

$$\bar{S}_{\omega} F(m) = \bar{\bar{F}}(m,n) \times \bar{s}_t(n), \quad (1.16a)$$

$$\bar{s}_t^T(n) = \begin{bmatrix} s_t(0) & s_t(1) & s_t(2) & \dots & s_t(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\text{де } \bar{\bar{F}}(m,n) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & e^{-j(\frac{2\pi}{N}) \times 1 \times 1} & e^{-j(\frac{2\pi}{N}) \times 2 \times 1} & \dots & e^{-j(\frac{2\pi}{N}) \times (N-1) \times 1} \\ \hline 1 & e^{-j(\frac{2\pi}{N}) \times 1 \times 2} & e^{-j(\frac{2\pi}{N}) \times 2 \times 2} & \dots & e^{-j(\frac{2\pi}{N}) \times (N-1) \times 2} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 1 & e^{-j(\frac{2\pi}{N}) \times 1 \times (N-1)} & e^{-j(\frac{2\pi}{N}) \times 2 \times (N-1)} & \dots & e^{-j(\frac{2\pi}{N}) \times (N-1) \times (N-1)} \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{S}_\omega^T(m) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline S_\omega(0) & S_\omega(1) & S_\omega(2) & \dots & S_\omega(N-1) \\ \hline \end{array}$$

Тут T – знак транспонування.

Для зворотного перетворення Фур'є

$$\bar{s}_t(n) = \bar{\bar{F}}^{T*}(n,m) \times \bar{S}_\omega(m) \quad (16б)$$

матричний дискретний оператор зворотного перетворення Фур'є має вигляд

$$\bar{\bar{F}}^{T*}(n,m) \times N = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & e^{j(\frac{2\pi}{N}) \times 1 \times 1} & e^{j(\frac{2\pi}{N}) \times 1 \times 2} & \dots & e^{j(\frac{2\pi}{N}) \times 1 \times (N-1)} \\ \hline 1 & e^{j(\frac{2\pi}{N}) \times 2 \times 1} & e^{j(\frac{2\pi}{N}) \times 2 \times 2} & \dots & e^{j(\frac{2\pi}{N}) \times 2 \times (N-1)} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 1 & e^{j(\frac{2\pi}{N}) \times (N-1) \times 1} & e^{j(\frac{2\pi}{N}) \times (N-1) \times 2} & \dots & e^{-j(\frac{2\pi}{N}) \times (N-1) \times (N-1)} \\ \hline \end{array}$$

де $*$ – знак комплексного спряження.

Дискретне перетворення Фур'є, внаслідок простоти обчислення (особливо при використанні алгоритмів швидкого перетворення) знайшло широке використання при розв'язанні диференціальних рівнянь динамічної рівноваги лінійних систем.

Так, якщо на вхід лінійної системи з функцією системи $K(j\omega)$ надходить сигнал $s(t)$, то для обчислення реакції системи $x(t)$ слід дискретизувати сигнал $s(t) \rightarrow s_t(n)$, дискретизувати (або обчислити по точках) коефіцієнт передачі $K(j\omega) \rightarrow K(k)$, знайти пряме дискретне перетворення Фур'є сигналу $s_t(n) \rightarrow S_\omega(k)$ і знайти дискретний спектр реакції

$$X_\omega(k) = S_\omega(k) \times K(k) \quad (1.18)$$

Далі по спектру $X_\omega(k)$ знайти дискретні відліки реакції

$$\bar{X}_t = \frac{1}{N} \bar{\bar{F}}^* \times \bar{X}_\omega \quad (1.19)$$

В натуральних координатах та сама процедура, на перший погляд, має меншу кількість операцій, бо імпульсну характеристику $g(t)$ системи знаходять як зворотне перетворення Фур'є від функції $K(k)$

$$\bar{g}_t = \frac{1}{N} \bar{\bar{F}}^* \times \bar{K} \quad (1.20)$$

за формулою (1.8), (1.9), що реалізує дискретну згортку, можна обчислити реакцію кола

$$\bar{x}_t = \bar{\bar{G}} \times \bar{s}_t,$$

але зворотну задачу (пошук \bar{s}_t по \bar{x}_t , $\bar{\bar{G}}$) легше розв'язати в області перетворення Фур'є, тому що в натуральних координатах для цього потрібно обернути матрицю $\bar{\bar{G}}$, в той час як для спектрів таке обернення виконується значно простіше.

Справді, вираз (1.18) в матричному вигляді можна записати як

$$\bar{X}_\omega = \bar{\bar{K}} \times \bar{S}_\omega, \quad (1.21)$$

де $\bar{\bar{K}}$ – діагональна матриця значень $K(k)$.

Тому, для отримання матриці зворотної до $\bar{\bar{K}}$, необхідно знайти зворотні величини елементів діагоналі і обчислити спектр вихідного сигналу

$$\bar{S}_\omega = \bar{\bar{K}}^{-1} \times \bar{X}_\omega \quad (1.22)$$

Часто це буває значно простіше, ніж розв'язувати задачі реставрації в натуральних координатах.

1.7 Дискретні перетворення з дійсним ядром

1.7.1 Вступні зауваження

Перетворення Фур'є та споріднені з ним (перетворення Лапласа, Z – перетворення) є найпоширенішими в сучасній інженерній практиці як засіб найбільш раціонального і простого розв'язання лінійних диференціальних рівнянь.

Але при аналізі, стисненні, передачі сигналів перетворення Фур'є, яке має комплексне ядро $e^{\pm j\omega t}$ не завжди є зручним і оптимальним. У ряді випадків, при обробленні саме сигналів, доцільніше використовувати інші ортогональні перетворення, серед яких великої популярності набули перетворення із дійсним ядром.

Це, в першу чергу, перетворення Уолша, яке набуло широкого розповсюдження в техніці зв'язку та косинусне перетворення, яке широко використовується в пристроях обробки біоінформації.

1.7.2 Перетворення Уолша

Розрізняють неперервне та дискретне перетворення Уолша. В залежності від впорядкування трансформант (елементарних функцій за якими проводиться розклад функції в ряд Уолша), тобто їх нумерації, розділяють перетворення Уолша-Корчмаржа, Уолша-Пейлі та Уолша-Адамара.

Існують алгоритми перенумерації трансформант цих перетворень, тому більш детально розглянемо найзручніше для формування і подальшого використання в математичних операціях над функціями перетворення Уолша-Адамара (або просто Адамара).

Позначимо функцію Адамара $w(n,t)$, де n – номер функції (трансформанти), t – час в інтервалі періоду (функція періодична, період $T = 1$).

В такому разі будь-яку періодичну функцію $s(t)$ можна представити на періоді рядом

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} H_n \times w(n,t), \quad (1.23)$$

де H_n – «амплітуда» (ваговий коефіцієнт) функції $w(n,t)$, яка обчислюється за формулою

$$H_n = \int_0^1 s(t) \times w(n,t) dt \quad (1.24)$$

Після дискретизації сигналу $s(t)$ і функції $w(n,t)$ з кроком Δt на періоді $T = \Delta t \times N$ одержимо матричний оператор перетворення Адамара $\bar{\bar{W}}$, який перетворює дискретні відліки сигналу s_t в дискретні трансформанти з амплітудами H_n

$$\bar{H} = \bar{\bar{W}} \times \bar{S}_t \quad (1.25)$$

Якщо дискретний матричний оператор \bar{F} перетворення Фур'є було отримано з неперервного перетворення, то у випадку перетворення Адамара зручніше спочатку отримати матричний оператор $\bar{\bar{W}}$, за яким можна отримати трансформанти Адамара неперервного перетворення.

Базовою для формування матриці Адамара є матриця другого порядку

$$\bar{\bar{W}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.26a)$$

$$\text{та Кронекерів множник } \bar{\bar{M}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.26b)$$

Кронекерів добуток матриць (операцію множення позначають знаком

(\otimes) – це такий добуток, коли кожна матриця $\bar{\bar{W}}$ множиться окремо на елементи множника, тобто

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \bar{\bar{W}}_4 \quad (1.27a)$$

і порядок матриці $\bar{\bar{W}}$ подвоюється.

Так само далі

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \bar{\bar{W}}_8 \quad (1.276)$$

і т.д.

За цим простим алгоритмом формують матрицю дискретного перетворення Адамара будь-якого порядку $N = 2^n$, n – ціле число.

Побудуємо далі за матрицею $\bar{\bar{W}}_8$ трансформанти неперервного перетворення Адамара. При цьому будемо враховувати, що кожен відлік ± 1 в рядку матриці, який відповідає відліку неперервної трансформанти належить відповідній точці $k\Delta t$ на осі часу (k – номер стовпця матриці $\bar{\bar{W}}$, нумерація стовпців з $k=0,1,2,\dots,N-1$). Інтервал між точками k та $k+1$ (виключаючи $k+1$) має значення трансформанти в точці k .

Тоді функції $w(0,t), \dots, w(7,t)$ мають вигляд рис.1.4.

У відповідності до (1.25) зворотне дискретне перетворення Уолша-Адамара має вигляд

$$\bar{s}_t = \bar{\bar{W}}^{-1} \times \bar{H}, \quad (1.28)$$

де зворотна матриця

$$\bar{\bar{W}}^{-1} = \frac{1}{N} \times \bar{\bar{W}}. \quad (1.29)$$

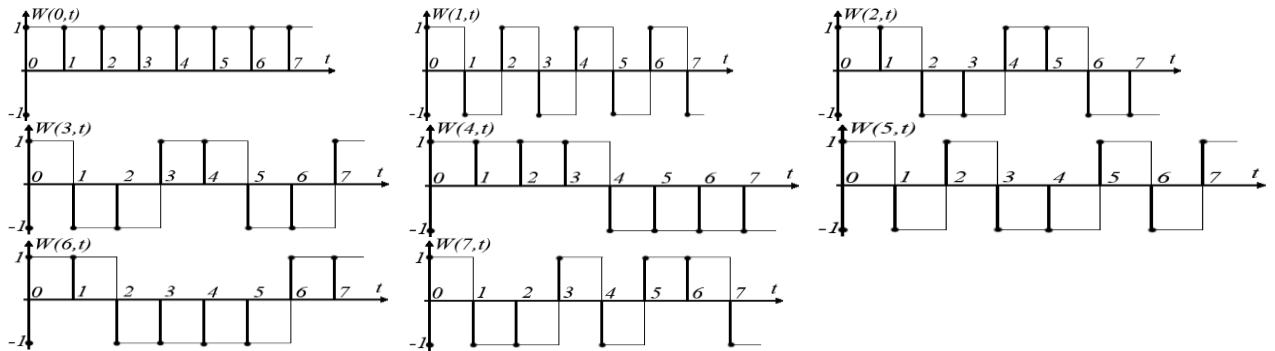


Рис.1.4.

1.7.3 Деякі властивості ортогональних перетворень

Серед властивостей ортогональних перетворень найбільш загальними і важливими є їх ортогональність і повнота.

Властивість ортогональності для неперервних трансформант виражають простою формулою

$$\int_0^T w(n, t) \times w(k, t) dt \equiv 0, \text{ для } n \neq k; \quad (1.30a)$$

$$\int_0^T w(n, t) \times w(k, t) dt = \varepsilon^2, \text{ для } n = k, \quad (1.30б)$$

де $w(n, t)$ – n -та за номером трансформанта перетворення; T – період; ε^2 – «енергія» n -ї трансформанти за період (середня потужність).

Для дискретного перетворення кожен n -й рядок дискретного матричного оператора перетворення \bar{W} містить відліки n -ї трансформанти $w_{n,i}$, тому формули (1.30) приймають вигляд

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_{n,i} \times w_{k,i} \equiv 0, \text{ для } n \neq k; \quad (1.31a)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_{n,i} \times w_{k,i} = \varepsilon^2, \text{ для } n = k. \quad (1.31б)$$

Під **повнотою перетворення** розуміють його спроможність забезпечити взаємно однозначну відповідність натурального сигналу $s(t)$ та його образу в області трансформант.

Так, для перетворення Фур'є, якщо

$$S(j\omega) = F\{s(t)\}, \quad (1.32a)$$

то

$$s(t) = F^{-1}\{S(j\omega)\}. \quad (1.32б)$$

Для дискретних ортогональних перетворень це забезпечується наявністю зворотного матричного оператора до оператора прямого перетворення, тобто якщо

$$\bar{S}_\omega = \bar{W} \times \bar{s}_t, \quad (1.33a)$$

то

$$\bar{s}_t = \bar{W}^{-1} \times \bar{S}_\omega. \quad (1.33б)$$

1.7.4 Косинусне перетворення

Останні роки широкого поширення при аналізі біосигналів набуло косинусне перетворення, що призвело навіть до випуску спеціалізованих косинусних процесорів. Саме косинусне перетворення $Cs(n, t)$ вперше запропоновано в роботі і базується на уявному розмноженні досліджуваного сигналу осесиметричною парою. Трансформанти косинусного перетворення мають період π , а їх вигляд (для перших чотирьох трансформант) наведено на рис.1.6.

Як видно з рис.1.6, усі непарні (за номером) трансформанти косинусного перетворення $Cs(n, t)$ мають стрибки на початку періоду, а всі парні – таких стрибків не мають.

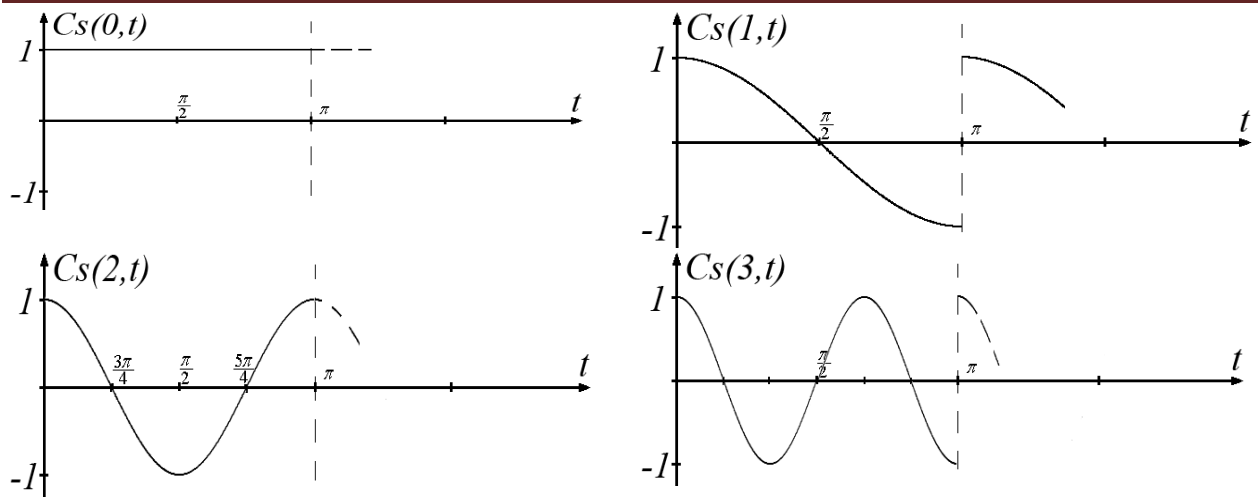


Рис.1.6

Косинусний ряд неперервного перетворення можна подати у вигляді

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{\omega n} \times Cs(n, t), \quad (1.34a)$$

де $S_{\omega n}$ – амплітуда косинусної трансформанти, яку обчислюємо за формулою

$$S_{\omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} s(t) \times Cs(n, t) dt. \quad (1.34b)$$

Для демонстрації отримання матричного оператора косинусного перетворення розглянемо першу трансформанту $Cs(1, t)$ на рис.1.7

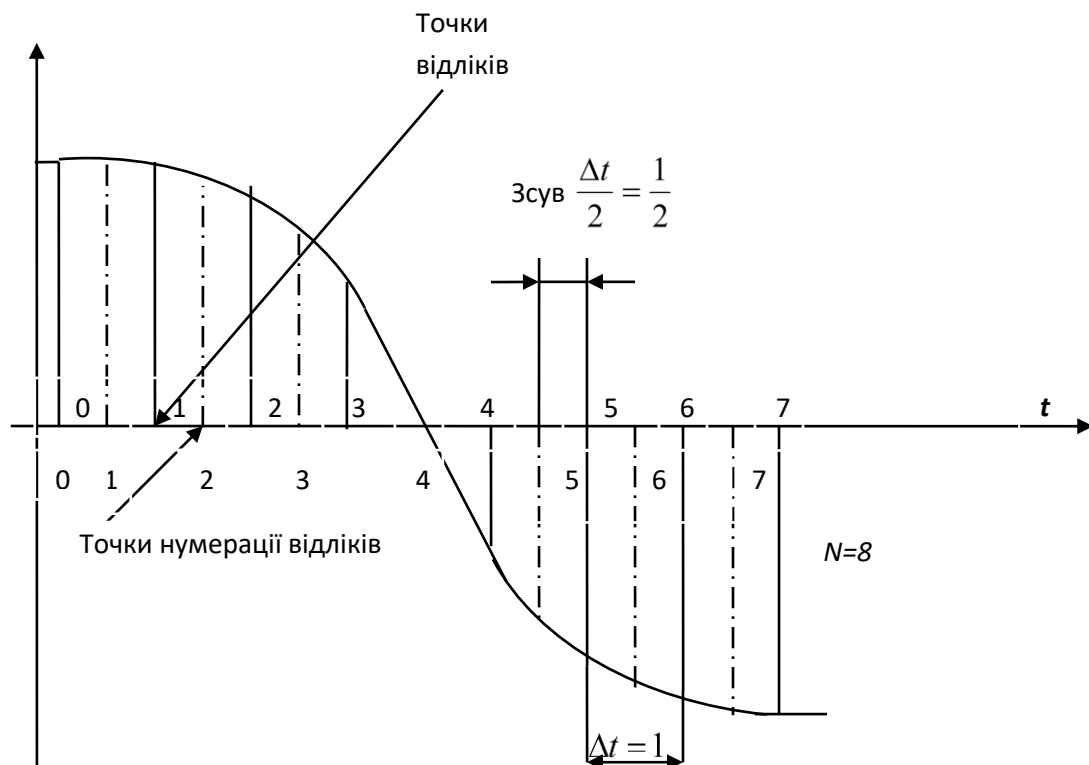


Рис.1.7

Неперервними вертикальними лініями (формат дискретного перетворення $N = 8$) позначено ті значення відліків, які беруть для дискретного перетворення Фур'є або Уолша. Але при такій дискретизації

функція $Cs(n,k)$ не має нульового середнього (відлік в точці 0 не компенсується, усі інші відліки компенсуються попарно). Тому хоча б для функції $Cs(0,k)$ трансформанта $Cs(1,k)$ буде неортогональною (не виконується умова (1.31a)). Умова ортогональності не виконується тоді і для усіх інших пар трансформант (крім парних).

Тому для забезпечення ортогональності відліків усіх трансформант ці відліки з «точок відліків» потрібно посунути на інтервал $\pi/2N$ (при інтервалі дискретизації π/N) в «точки нумерації відліків». Тоді матричний оператор прямого дискретного ортогонального косинусного перетворення наприклад, для $N=6$ матиме вигляд

$$\overline{\overline{Cs}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \frac{\pi}{12} & \cos \frac{3\pi}{12} & \cos \frac{5\pi}{12} & \cos \frac{7\pi}{12} & \cos \frac{9\pi}{12} & \cos \frac{11\pi}{12} \\ \cos \frac{2\pi}{12} & \cos \frac{6\pi}{12} & \cos \frac{10\pi}{12} & \cos \frac{14\pi}{12} & \cos \frac{18\pi}{12} & \cos \frac{22\pi}{12} \\ \cos \frac{3\pi}{12} & \cos \frac{9\pi}{12} & \cos \frac{15\pi}{12} & \cos \frac{21\pi}{12} & \cos \frac{27\pi}{12} & \cos \frac{33\pi}{12} \\ \cos \frac{4\pi}{12} & \cos \frac{12\pi}{12} & \cos \frac{20\pi}{12} & \cos \frac{28\pi}{12} & \cos \frac{36\pi}{12} & \cos \frac{44\pi}{12} \\ \cos \frac{5\pi}{12} & \cos \frac{15\pi}{12} & \cos \frac{25\pi}{12} & \cos \frac{35\pi}{12} & \cos \frac{45\pi}{12} & \cos \frac{55\pi}{12} \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Для пошуку матричного оператора зворотного косинусного перетворення скористаємося умовою ортогональності (1.31a) для усіх пар рядків (пар дискретних трансформант), для чого обчислимо добуток

$$\overline{\overline{Cs}} \times \overline{\overline{Cs}}^T = \text{Diag}\{\varepsilon^2\}, \quad (1.36)$$

де T – знак трансформування; $\text{Diag}\{.\}$ – діагональна матриця, причому в діагоналі матриці в (1.36) одержимо енергії ε^2 за період для i -х дискретних трансформант. При цьому $\varepsilon_0 = N$, а $\varepsilon_i^2 (i \neq 0) = N/2$.

Тому оператор зворотного косинусного перетворення матиме для формату $N=6$ вигляд

$$\bar{\bar{C}}_S^{-1} = \frac{2}{6} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cos \frac{\pi}{12} & \cos \frac{2\pi}{12} & \cos \frac{3\pi}{12} & \cos \frac{4\pi}{12} & \cos \frac{5\pi}{12} \\ \frac{1}{2} & \cos \frac{3\pi}{12} & \cos \frac{6\pi}{12} & \cos \frac{9\pi}{12} & \cos \frac{12\pi}{12} & \cos \frac{15\pi}{12} \\ \frac{1}{2} & \cos \frac{5\pi}{12} & \cos \frac{10\pi}{12} & \cos \frac{15\pi}{12} & \cos \frac{20\pi}{12} & \cos \frac{25\pi}{12} \\ \frac{1}{2} & \cos \frac{7\pi}{12} & \cos \frac{14\pi}{12} & \cos \frac{21\pi}{12} & \cos \frac{28\pi}{12} & \cos \frac{35\pi}{12} \\ \frac{1}{2} & \cos \frac{9\pi}{12} & \cos \frac{18\pi}{12} & \cos \frac{27\pi}{12} & \cos \frac{36\pi}{12} & \cos \frac{45\pi}{12} \\ \frac{1}{2} & \cos \frac{11\pi}{12} & \cos \frac{22\pi}{12} & \cos \frac{33\pi}{12} & \cos \frac{44\pi}{12} & \cos \frac{55\pi}{12} \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Узагальнюючи отриманий результат, можна сказати, що матриця зворотного косинусного перетворення є транспонованою матрицею прямого перетворення, помноженого на множник $2/N$, в якій перший стовпець містить замість одиниць значення $1/2$.

Такий, відносно складний порядок формування матриці зворотного перетворення пов'язаний з тим, що матриця $\bar{\bar{C}}_S$ є несиметричною відносно головної діагоналі.

Існує велика кількість ортогональних перетворень із несиметричним матричним оператором, до того ж таких, що ε_i^2 в матриці $Diag\{.\}$ в (1.36) є різними. Оскільки ці значення ще й залежать від формату N , то в загальному випадку слід використовувати процедуру нормування прямого та зворотного перетворення. Для цього після обчислення ε_i^2 в (1.36) поділимо кожний i -й рядок матриці прямого перетворення на $\varepsilon_i = \sqrt{\varepsilon_i^2}$. Отримаємо, наприклад, матрицю $\bar{\bar{C}}_{SH}$.

Тоді

$$\bar{\bar{C}}_{SH} \times \bar{\bar{C}}_{SH}^T = \bar{\bar{E}}, \quad (1.37a)$$

де $\bar{\bar{E}}$ – одинична матриця.

Але, оскільки вірне рівняння (1.37a), то вірно також

$$\bar{\bar{C}}_{SH}^T = \bar{\bar{C}}_{SH}^{-1}. \quad (1.37b)$$

Матриця $\bar{\bar{C}}_{SH}^T$ для $N = 6$ матиме вигляд

$$\overline{\overline{C}}_{SH}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{2\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{3\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{4\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{3\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{6\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{9\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{12\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{15\pi}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{10\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{15\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{20\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{25\pi}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{7\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{14\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{21\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{28\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{35\pi}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{9\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{18\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{27\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{36\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{45\pi}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{11\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{22\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{33\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{44\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{55\pi}{12} \end{bmatrix}. \quad (1.38a)$$

Вираз (1.37б) можна записати інакше, якщо вважати рядки матриці $\overline{\overline{C}}_{SH}^{-1}$ відліками деяких нових трансформант. Тоді (1.37б) можна записати у вигляді

$$\overline{\overline{C}}\overline{\overline{C}}_{SH} \times \overline{\overline{C}}\overline{\overline{C}}_{SH}^T, \quad (1.38б)$$

де $\overline{\overline{C}}\overline{\overline{C}}_{SH} = \overline{\overline{C}}_{SH}^{-1}$, $\overline{\overline{C}}\overline{\overline{C}}_{SH}^T = \overline{\overline{C}}_{SH}$.

При цьому (згідно з (1.38б)) рядки матриці $\overline{\overline{C}}\overline{\overline{C}}_{SH}$ містять відліки ортогональних функцій, тобто для несиметричного матричного оператора завжди можна знайти споріднену систему ортогональних перетворень, відмінну від вихідної. Так, період косинусних функцій в рядках матриці (1.38а) становить $\pi/2$. Крім того, відліки беруться із початку періоду без зсуву. Оскільки нормований косинус в кожному рядку в першому за номером стовпці (нумерацію тут доцільно розглядати не з нуля, а з одиниці), має вигляд $(1/\sqrt{3})\cos(0) = 1/\sqrt{3}$, то записавши

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

отримаємо ряд косинусів із непарними номерами з δ -функціями з площею $\left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{N}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Першу трансформанту дискретного перетворення (без δ -функції)

наведено на рис 1.8.

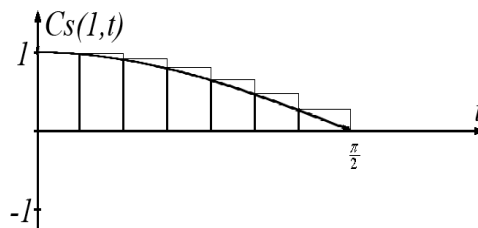


Рис.1.8

Аналогічно можна побудувати усі інші трансформанти.

Крім розглянутих існує велика кількість інших неперервних та дискретних ортогональних перетворень, з найбільш поширеними з яких можна ознайомитися в роботах.

1.8 Реставрація образів за методом умовної деконволюції

Умовна деконволюція образу – це метод реставрації, що базується на моделі (1.2), (1.8) в натуральних координатах, або на моделі (1.18) – (1.22) в області трансформант Фур'є. При цьому відомими вважають спотворений дискретний образ \bar{L} , або його дискретне перетворення Фур'є \bar{L}_ω , дискретний оператор згортки в натуральних координатах, або відповідний до нього оператор у вигляді діагональної матриці, елементами діагоналі якої є двовимірне перетворення Фур'є від двовимірної імпульсної характеристики системи (причому трансформанти розташовані в діагоналі рядок за рядком). Що стосується шуму \bar{V} , то (крім того, що він утворює поле ергодичне, стаціонарне, ізопланарне, гомогенне і адитивне) відома лише його енергія

$$\varepsilon^2 = [\bar{V}]^T \times [V]. \quad (1.39)$$

Оскільки логічний і фізичний сенс методу зрозумілий при розгляді моделі деградації в області натуральних координат, то метод з'явився історично саме для моделі деградації (1.2). Оскільки, як вже ясно з наведених вище особливостей моделі деградації в натуральних координатах, процедура реставрації досить громіздка і незручна, то слід перевести алгоритм умовної деконволюції в область трансформант Фур'є.

Тому у подальшому розглянемо обидва варіанти алгоритму умовної деконволюції – в натуральних координатах і в координатах трансформант Фур'є.

1.8.1 Умовна деконволюція в області натуральних координат

Згортка (конволюція) сигналу з імпульсною характеристикою системи з додаванням шуму призводить до спотворення первинного образу в системі відображення

$$\bar{L} = \bar{\bar{G}} \times \bar{f} + \bar{V}, \quad (1.40)$$

де \bar{L} – стовпець відліків спотвореного (деградованого) образу; $\bar{\bar{G}}$ – матричний дискретний оператор згортки порядку M ; \bar{f} – стовпець дискретних відліків вихідного образу; \bar{V} – стовпець відліків випадкової реалізації адитивного шуму.

Реставрація (пошук первинного образу) є зворотною операцією до конволюції. Тому таку операцію звичайно називають **деконволюцією** (за

умови урахування впливу адитивного шуму – тому таку деконволюцію називають **умовною**).

Спочатку для простоти розглянемо особливості **умовної деконволюції** на прикладі реставрації одновимірного сигналу, модель деградації якого має вигляд (1.3). Далі одержані результати узагальнимо на двовимірний випадок.

У випадку дискретного поля образу енергію шуму можна обчислити за формулою (1.39).

Оскільки шум ергодичний, а формат образу (порядок матриці $\bar{\bar{G}}$) $M \cong 10^3$, то маємо репрезентативну вибірку дискретів шуму (виміряних на тій частині поля образу, де досліджуваний образ \bar{f} відсутній), а тому й сума квадратів цих дискретів є досить точною оцінкою енергії шуму (шумове поле однорідне – тому дисперсія в усіх його точках однакова).

Якщо, наприклад, середнє значення шуму $\mu\{v\} \equiv 0$, тоді

$$\varepsilon^2 = M \times \sigma^2, \quad (1.41)$$

тобто енергія шуму пропорційна дисперсії, що зручно, коли дисперсія σ^2 є апіорі відомою.

Ту саму енергію можна виразити з (1.40), якщо записати

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{L} \boxminus \bar{\bar{G}} \times \bar{f}; \\ \bar{V}^T &= (\bar{L} - \bar{\bar{G}} \times \bar{f})^T \end{aligned} \quad (1.42)$$

і згідно з (1.40)

$$\varepsilon^2 = (\bar{L} - \bar{\bar{G}} \times \bar{f})^T \times (\bar{L} - \bar{\bar{G}} \times \bar{f}) \quad (1.43a)$$

З іншого боку ясно, що внаслідок завжди обмеженої інформації про шум обчислення точного значення первинного образу \bar{f} неможливе. Можливе обчислення лише оцінки \hat{f} цього образу, яка (за наданими критеріями) буде наближатися до \bar{f} . Одним з таких критеріїв є те, що енергія шуму для оцінки \hat{f} для первинного образу буде однаковою, тобто

$$\varepsilon^2 = (\bar{L} - \bar{\bar{G}} \times \hat{f})^T \times (\bar{L} - \bar{\bar{G}} \times \hat{f}) \quad (1.43б)$$

В формулі (1.43б) відомі ε^2 , \bar{L} , $\bar{\bar{G}}$. Але це рівняння відносно шуканої оцінки \hat{f} є нелінійним. Для пояснення цього розглянемо приклад, коли порядок матриці $\bar{\bar{G}}$ дорівнює 3, вектори-стовпці \bar{L} і \hat{f} мають розміри 3×1

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \left(\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} (L_0 - g_{00} \times f_0 - g_{01} \times f_1 - g_{02} \times f_2) \\ (L_1 - g_{10} \times f_0 - g_{11} \times f_1 - g_{12} \times f_2) \\ (L_2 - g_{20} \times f_0 - g_{21} \times f_1 - g_{22} \times f_2) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} (L_0 - g_{00} \times f_0 - g_{01} \times f_1 - g_{02} \times f_2) \\ (L_1 - g_{10} \times f_0 - g_{11} \times f_1 - g_{12} \times f_2) \\ (L_2 - g_{20} \times f_0 - g_{21} \times f_1 - g_{22} \times f_2) \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (L_0 - g_{00} \times f_0 - g_{01} \times f_1 - g_{02} \times f_2)^2 + \\
&\quad (L_1 - g_{10} \times f_0 - g_{11} \times f_1 - g_{12} \times f_2)^2 + \\
&\quad + (L_2 - g_{20} \times f_0 - g_{21} \times f_1 - g_{22} \times f_2)^2,
\end{aligned} \tag{1.43e}$$

звідки одержимо

$$\begin{aligned}
&(L_0^2 + L_1^2 + L_2^2) - 2(g_{00} \times L_0 + g_{10} \times L_1 + g_{20} \times L_2) \times f_0 - 2(g_{01} \times L_0 + g_{11} \times \\
&\quad L_1 + g_{21} \times L_2) \times f_1 - 2(g_{02} \times L_0 + g_{12} \times L_1 + g_{22} \times L_2) \times f_2 + (g_{00}^2 + g_{10}^2 + \\
&\quad g_{20}^2) \times f_0^2 + 2(g_{00} \times g_{01} + g_{10} \times g_{11} + g_{20} \times g_{21}) \times f_0 \times f_1 + 2(g_{00} \times g_{02} + g_{10} \times \\
&\quad g_{12} + g_{20} \times g_{22}) \times f_0 \times f_2 + (g_{01}^2 + g_{11}^2 + g_{21}^2) \times f_1^2 + 2(g_{01} \times g_{02} + g_{11} \times g_{12} + \\
&\quad g_{21} \times g_{22}) \times f_1 \times f_2 + (g_{02}^2 + g_{12}^2 + g_{22}^2) \times f_2^2 - \varepsilon_0^2 = 0.
\end{aligned} \tag{1.43e}$$

Саме для цього виразу, **нелінійного** відносно шуканих векторів $\hat{f} = [f_0 \ f_1 \ f_2]^T$, кількість розв'язків може бути нескінченно великою. Таким чином, слід ввести ще одну (оскільки порядок нелінійності дорівнює двом) додаткову умову, яка б виділила з множини розв'язків \hat{f} лише його єдине значення. Ця друга умова повинна бути простою, щоб не підвищити ступеню нелінійності і обирати з множини образів такий, який відповідає деяким фізичним властивостям, притаманним образам досліджуваних об'єктів. Таким критерієм є критерій "гладкості" одержаного (як і первинного) образу.

Функцію "гладкості" ψ від шуканої оцінки \hat{f} первинного образу надають у вигляді

$$\psi(\hat{f}) = \sum_{i=1}^{M-2} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 = \min. \tag{1.44}$$

Так, наприклад, якщо значення знайденої оцінки лежать на одній прямій лінії (рис.1.9,а), то $f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} \equiv 0$. Якщо ж між двома значеннями f_{i-1}, f_{i+1} є велике відхилення значення f_i (рис.1.9,б,в), тоді величина $f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}$ зростає дуже різко і така ситуація не відповідає критерію (1.44), тобто не може з'явитися в реставрованому образі \hat{f} .

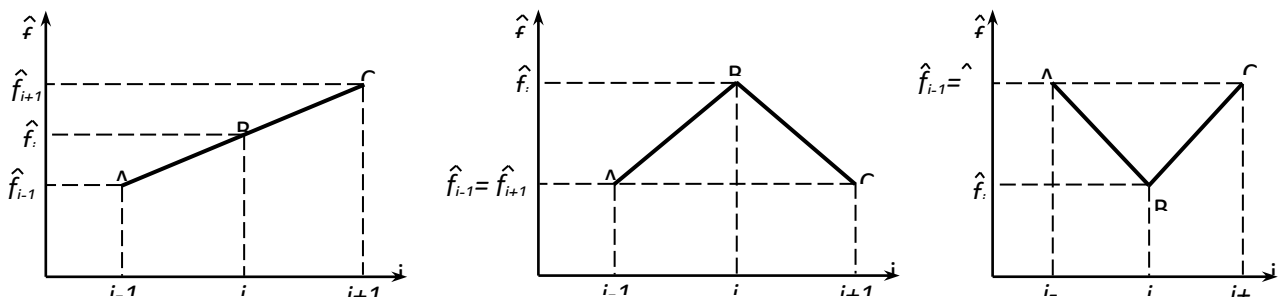


Рис.1.9

Критерій (1.44) є найпростішим з можливих, оскільки він враховує мінімальну можливу кількість послідовних точок дискретної оцінки. Кількість точок можна збільшити (тобто у виразі типу (1.44) враховувати чотири, п'ять і т. ін. точок), але в наш час такі більш складні критерії

"гладкості" не використовують у практиці. Якщо кожен з виразів в дужках формули (1.44) вважати елементом стовпця $\bar{\varphi}$, то вираз можна записати у матричному вигляді

$$\Psi(\hat{f}) = \bar{\varphi}^T \times \bar{\varphi}.$$

Стовпець $\bar{\varphi}$ може бути одержаний із стовпця \hat{f} множенням його на дискретний оператор \bar{c} , аналогічний \bar{G} в (1.40). Тобто

$$\bar{\varphi} = \bar{c} \times \hat{f}, \quad (1.45)$$

де дискретний оператор \bar{c} одержано з імпульсної характеристики "гладкості"

$g = [1 \ 2 \ 1]$, тобто

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

Тоді вираз (1.44) можна записати у вигляді

$$\Psi(\hat{f}) = (\bar{c} \times \hat{f})^T \times (\bar{c} \times \hat{f}). \quad (1.47)$$

Загальна система рівнянь, розв'язок якої становитиме шукану (лише єдину, чітко визначену двома умовами) оцінку первинного образу, має, таким чином, вигляд (1.47), (1.43,a)

$$\begin{aligned} (\bar{L} - \bar{G} \times \hat{f})^T \times (\bar{L} - \bar{G} \times \hat{f}) \boxplus \varepsilon^2 &= \min = 0; \\ (\bar{c} \times \hat{f})^T \times (\bar{c} \times \hat{f}) &= \min. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Зауважимо, що обидві системи рівнянь мають розмірність і сенс оцінки шуму. Так, перша система рівнянь має сенс енергії адитивного шуму реставрованого образу, яка після реставрації повинна залишитись хоча б не більшою, ніж у спотвореному образі. Друга система рівнянь має сенс шуму "не гладкості" реставрованого образу. Таким чином, розв'язання системи нелінійних рівнянь — це пошук мінімуму позитивної функції (енергії). Оскільки таких мінімумів може бути багато, то задача зводиться до знаходження або глобального мінімуму, або мінімуму задовільного (такого, що задовольняє вимогам для якісної "гладкої" оцінки \hat{f} , в якій енергія шуму не перевищує первинну енергію шуму образу \bar{V}).

Для розв'язання задачі треба обидві системи рівнянь в (1.48) об'єднати в єдину (оскільки сума мінімумів двох позитивних функцій не є мінімумом

сумарної функції). Для об'єднання скористаємося методом Лагранжа невизначених коефіцієнтів λ (позитивних), тобто будемо шукати мінімум єдиної системи рівнянь, взявши кожне з них в (6.45) з деякою вагою. Для цього зважимо коефіцієнтом λ першу систему в (6.45) і знайдемо суму першої та другої системи. Одержимо

$$\beta = \lambda \times \left[(\bar{L} - \bar{G} \times \hat{f})^T \times (\bar{L} - \bar{G} \times \hat{f}) - \varepsilon^2 \right] + (\bar{c} \times \hat{f})^T \times (\bar{c} \times \hat{f}) = \min. \quad (1.49)$$

В мінімумі (екстремумі) функції в (1.49) похідна від неї за координатами f_i (дискретами шуканої оцінки \hat{f}) повинна дорівнювати нулю (для усіх часткових похідних $\partial\beta/\partial f_i$).

Таким чином треба обчислити всі похідні від виразу (1.49) для кожного дискрета f_i ($i = 0, 1, \dots, M-1$). Для пояснення правила обчислення похідних від складного матричного виразу (1.49) розглянемо вираз (1.43). Тоді

$$\begin{aligned} \beta = \lambda \left\{ \left(\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) - \varepsilon^2 \right\} + \\ + \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right). \quad (1.50,a) \end{aligned}$$

Похідна має вигляд

$$\begin{aligned} \partial\beta/\partial f_0 = \lambda \times \left\{ \left(- \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) + \right. \\ + \left. \left(\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \right)^T \times \left(- \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} + \\ + \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) + \\ + \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right). \quad (1.50b) \end{aligned}$$

Розглянемо перший вираз в дужках в (1.50б). Оскільки вважаємо всі значення пікселів f_i незалежними від f_0 , то всі похідні $\partial f_i/\partial f_0$, $i \neq 0$ дорівнюють нулю, а $\partial f_0/\partial f_0 = 1$. Якщо диференціювати $\partial\beta/\partial f_1$, то, аналогічно, в перших дужках усі елементи стовпця $\partial\hat{f}/\partial f_1 = 0$ крім $\partial f_1/\partial f_1$ що знаходиться у другому рядку. Тоді

$$\begin{aligned}
\partial\beta/\partial f_0 &= \lambda \times \left(- \begin{bmatrix} g_{00} \\ g_{10} \\ g_{20} \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) + \\
&+ \left(\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right)^T \times \left(- \begin{bmatrix} g_{00} \\ g_{10} \\ g_{20} \end{bmatrix} \right) + \\
&+ \left(\begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ c_{20} \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) + \\
&\left(\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ c_{20} \end{bmatrix} \right); \\
\partial\beta/\partial f_1 &= \lambda \times \left(- \begin{bmatrix} g_{01} \\ g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) + \\
&+ \left(\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right)^T \times \left(- \begin{bmatrix} g_{01} \\ g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} \right) + \\
&+ \left(\begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) + \\
&\left(\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right)^T \times \left(\begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Аналогічно для $\partial\beta/\partial f_2$.

Проводячи елементарні матричні операції групування складових при однакових множниках, одержимо

$$\begin{bmatrix} \partial\beta/f_0 \\ \partial\beta/f_1 \\ \partial\beta/f_2 \end{bmatrix} = \lambda \times \left\{ (-\bar{G}^T) \times (\bar{L} - \bar{G} \times \hat{f}) + (\bar{L} - \bar{G} \times \hat{f})^T \times (-\bar{G}) \right\} + \bar{c}^T \times \bar{c} \times \hat{f} + (\bar{c} \times \hat{f})^T \times \bar{c},$$

звідки, враховуючи, що $(-\bar{G}^T) \times (\bar{L} - \bar{G} \times \hat{f}) = (\bar{L} - \bar{G} \times \hat{f})^T \times (-\bar{G})$, одержимо

$$\begin{bmatrix} \partial\beta/f_0 \\ \dots \dots \dots \\ \partial\beta/f_{M-1} \end{bmatrix} = 2\{\bar{G}^T \times \bar{G} \times \hat{f} - \bar{G}^T \times \bar{L}\} \times \lambda + 2\bar{c}^T \times \bar{c} \times \hat{f}$$

або, враховуючи, що в точці екстремуму похідні дорівнюють нулю,

$$\{\bar{G}^T \times \bar{G} \times \hat{f} - \bar{G}^T \times \bar{L}\} \times \lambda + \bar{c}^T \times \bar{c} \times \hat{f} = 0. \quad (1.51)$$

Таким чином, нелінійна задача (1.49) з нелінійностями другого порядку (квадратична форма) за рахунок диференціювання зведена до лінійної (до системи лінійних рівнянь M -го порядку (1.51) відносно шуканого стовпця), але з невизначеним (невідомим) коефіцієнтом λ .

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд

$$\hat{f} = \left[\bar{G}^T \times \bar{G} + \frac{1}{\lambda} \times \bar{c}^T \times \bar{c} \right]^{-1} \times \bar{G}^T \times \bar{L}. \quad (1.52)$$

Задачу умовної деконволюції слід розв'язувати за ітеративною процедурою:

1) обчислити (сформувати) матриці \bar{G} , \bar{c} , \bar{L} , виразу (1.52) (нагадаємо, що для одновимірного деградованого сигналу \bar{L} з $M = 1024$ дискретами розміри матриць \bar{G} , \bar{c} становлять $M \times M = 1024 \times 1024$);

2) призначити початкове значення константи λ ;

3) обчислити \hat{f} за (1.52) (для цього слід обернути матрицю в квадратних дужках розміру 1024×1024);

4) обчислити енергію шуму $\hat{\varepsilon}^2$ за формулою (1.41);

5) перевірити, чи обчислене значення $\hat{\varepsilon}^2$ є задовільним (тобто $\hat{\varepsilon}^2 \leq \varepsilon^2$, де ε^2 – енергія адитивного шуму спотвореного образу), чи ні. Якщо $\hat{\varepsilon}^2$ задовільне, то обчислення закінчити; якщо ні – то перейти до пункту (6) алгоритму;

6) змінити значення λ (якщо $\hat{\varepsilon}^2 \geq \varepsilon^2$, то збільшити λ , якщо $\hat{\varepsilon}^2 < \varepsilon^2$, то λ слід зменшити) і перейти до пункту (3) алгоритму.

З формули (1.52) і опису ітераційної процедури ясно, що метод умовної деконволюції навіть у випадку реставрації одновимірних образів великого формату ($M = 512, 1024, 2048$) є надзвичайно складним і потребує великих об'ємів пам'яті та громіздких обчислень, які до того ж призводять до накопичення великих операційних похибок. Тому в сучасній медичній практиці метод у такому вигляді не реалізують.

ЇУ випадку реставрації двовимірних образів ситуація катастрофічно погіршується.

Всі формули та ітераційний алгоритм залишаються тими самими, що й для одновимірного випадку. Винятком лише є умова "гладкості", яка у двовимірному варіанті описується імпульсною характеристикою

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(на відміну від [1, 2, 1] у випадку одновимірному). Але розміри матриць значно зростають. Так, для образу розміром 1024×1024 скануванням за рядками утворюють стовпець \bar{L} деградованого образу, але вже розміру $(1024)^2 \times 1$. Матриця \bar{G} має розміри $(1024)^2 \times (1024)^2$. Такий самий розмір $(10^6 \times 10^6)$ має матриця у квадратних дужках в формулі (1.52). Для її обернення потрібно близько $N = (10^6)^3 = 10^{18}$ операцій.

Але сформульований в натуральних координатах метод умовної деконволюції знайшов широке розповсюдження при переході до області трансформант Фур'є. У цьому випадку реставрація образу розміру 1024×1024 становить хоча й досить складну, але успішно (і досить швидко) розв'язувану задачу.

1.8.2 Умовна деконволюція в області трансформант Фур'є

На базі теореми про згортку дискретного оригіналу можна для дискретного перетворення Фур'є-образу (того ж формату $M \times M$, що й оригінал) записати формули деградації і одержати формулювання методу умовної деконволюції.

Так, модель (1.41) деградації (для двовимірного випадку) в області трансформант перетворення Фур'є можна записати у наступному вигляді

$$L(m, n) = M^2 \times G(m, n) \times F(m, n) + V(m, n), \quad (1.53)$$

де всі операнди одержані з оригіналів в натуральних координатах за допомогою ДПФ. Тоді умова (1.43,б) в спектральній області має вигляд

$$M^2 \times \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} |L(m, n) - M^2 \times \hat{F}(m, n) \times G(m, n)|^2 = \varepsilon^2 \quad (1.54)$$

Умова "гладкості" (у двовимірному випадку) має вигляд

$$M^2 \times \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} |\hat{F}(m, n) \times C(m, n)|^2 = \min, \quad (1.55)$$

де $C(m, n)$ – перетворення Фур'є від двовимірної функції "гладкості"

$$[c] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

в форматі $M \times M$ (тобто, оскільки $M \gg 3$, матрицю $[c]$ доповнюють нулями для одержання формату $M \times M$).

Вираз типу (1.51) має простий і компактний вигляд

$$M^2 \times \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \{ \lambda \times (|L(m, n) - M^2 \times \hat{F}(m, n) \times G(m, n)|^2 + \varepsilon^2) + |C(m, n) \times \hat{F}(m, n)|^2 \} = \min. \quad (1.56)$$

Такий простий вигляд основної формули, за якою знаходять $\hat{F}(m, n)$ є наслідком діагоналізації матриці дискретної згортки при переході до області трансформант Фур'є (згідно теореми про конволюцію оригіналів).

Диференціювання кожного з доданків суми (1.56) за $\hat{F}(m, n)$ також виконати значно легше, ніж у матричному випадку в натуральних координатах. Оскільки

$$\begin{aligned} & |L(m, n) - M^2 \times \hat{F}(m, n) \times G(m, n)|^2 = \\ & = [L(m, n) - M^2 \times \hat{F}(m, n) \times G(m, n)]^* \times \\ & \times [L(m, n) - M^2 \times \hat{F}(m, n) \times G(m, n)], \end{aligned}$$

де $*$ – означає комплексне спряження, то внаслідок диференціювання (1.56) одержимо розв'язок для кожного елемента (аналогічно до (1.52) у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{F}(m, n) &= \frac{1}{M^2} \times (G^*(m, n) \times L(m, n)) / \left(\frac{1}{\lambda} \times |C(m, n)|^2 + |G(m, n)|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{G(m, n)} \times \frac{|G(m, n)|^2}{M^2 \times (|C(m, n)|^2 + \frac{1}{\lambda} \times |G(m, n)|^2)} \times L(m, n). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Формула (1.57) описує коефіцієнт передачі фільтра, який реалізує умовну деконволюцію з підстроюваним параметром λ

$$K_{DF}(m, n) = \frac{1}{G(m, n)} \times \frac{|G(m, n)|^2}{M^2 \times (|C(m, n)|^2 + \frac{1}{\lambda} \times |G(m, n)|^2)} \quad (1.58)$$

і дуже (за формою) нагадує Вінерівський фільтр

$$K_W(m, n) = \frac{1}{G(m, n)} \times \frac{|G(m, n)|^2}{|G(m, n)|^2 + \frac{W_{vv}(m, n)}{W_{ff}(m, n)}},$$

де W_{vv} – спектр потужності шуму (перетворення Фур'є від кореляційної функції); W_{ff} – спектр потужності сигналів певного класу, на які фільтр налаштовано (перетворення Фур'є від кореляційної функції сигналів цього класу).

Але замість корегуючого доданка у знаменнику $W_{vv}(m, n)/W_{ff}(m, n)$ він має інший корегуючий доданок $\frac{1}{\lambda} \times |C(m, n)|^2$, який відображає умову "гладкості" з вагою $\frac{1}{\lambda}$.

Підстановкою (1.58) до (1.57) можна одержати результуючу формулу (для урахування значення λ в розв'язку)

$$M^2 \times \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\frac{1}{\lambda^2} \times |L(m, n)|^2 \times |C(m, n)|^4}{\left[\frac{1}{\lambda} \times |C(m, n)|^2 + |G(m, n)|^2 \right]^2} = \varepsilon^2. \quad (1.59)$$

Таким чином, на відміну від реставрації в натуральних координатах, процедуру реставрації не треба проводити ітераційно. Ітераційно знаходять лише λ для рівняння (1.59). Тобто ітераційне обчислення за (1.59)

(підстройку деконволюційного фільтра) можна виконати за наступним алгоритмом:

1) обчислити спектри (за допомогою ДПФ) деградованого образу $L(m,n)$, коефіцієнта передачі деградуючої системи $G(m,n)$ і згладжуючого фільтра $C(m,n)$;

2) сформувати фільтр (1.59) з невідомим коефіцієнтом λ ;

3) надати λ значення і обчислити за (1.59) значення ε^2 ;

4) якщо ε^2 задовільне, зупинити підстройку; якщо ж ні – змінити λ ;

5) перейти до пункту (3) алгоритму.

Оскільки рівність нулю похідних означає екстремум, то треба визначити, чи знайдене значення є мінімумом чи максимумом. Тому треба враховувати другі похідні від виразу (1.56) (за $\hat{F}(m,n)$). З аналізу виразу для других похідних виходить вимога

$$\lambda > \min \frac{|C(m,n)|^2}{|G(m,n)|^2} = \lambda_{min}. \quad (1.60)$$

Виконання умови (1.60) перед закінченням циклу обчислень слід перевірити. Якщо вона не виконується, треба змінити початкове значення λ .

На завершення розгляду деконволюційного фільтра слід зазначити, що, хоча він (1.58) нагадує Вінерівський фільтр, між цими фільтрами існує принципова різниця. Вінерівський фільтр підстроєний під клас сигналів з наданим енергетичним спектром і шумом з теж відомим енергетичним спектром. При фільтрації сигналу і шуму даного класу такий фільтр підстроювати не потрібно. Навпаки, деконволюційний фільтр має додатковий підстроюваний параметр λ , обчислення якого за формулою (1.59) потребує урахування даного конкретного деградованого образу $L(m,n)$. Тобто для кожного нового образу підстроювання параметра λ з урахуванням $L(m,n)$ слід проводити знову.

Але початкова (апріорна) інформація для використання методу умовної деконволюції є значно меншою (відома тільки енергія шуму). До того ж відсутня вимога, щоб усі образи і реалізації шуму відносились до гомогенних і некорельованих полів. Нема потреби обчислювати усереднені спектри потужності образу і шуму.

Обраний в розглянутому алгоритмі критерій оптимальності – "гладкість" функції – у вигляді Лапласіана є одним з багатьох можливих, що відкриває можливості варіації алгоритмів умовної деконволюції при їх подальшому поширенні у практиці.

Ще й досі існує некоректна думка про відносну трудомісткість перетворення Фур'є, що є базою до переходу в область трансформант. Але це

додаткове ускладнення настільки мале у порівнянні до трудомісткості деконволюції в натуральних координатах, а реалізація ДПФ настільки прискорює і полегшує обчислення, що саме перетворення Фур'є навпаки радикально (на декілька порядків) спрощує процедуру реставрації.

Як приклад, на рис. 1.10 наведена імпульсна характеристика деградуєючої системи $g(x,y)$, дисперсія адитивного білого шуму σ^2 а також вихідний (рис.1.10, в), деградований (рис.1.10, з) і реставрований (рис.1.10, б) образи (на рис. 1.10, а наведено результати фільтрації за методом зворотної корекції).

$$g(x,y) = \frac{1}{(x+1)^{0,2} + (y+1)^{0,2}}, \sigma^2 = (0,5)^2$$



X

а



в



SV

б



Y

з

Рис.1.10,1

$$g(x,y) = \frac{1}{(x+1)^{0,5} + (y+1)^{0,5}}, \sigma^2 = (0,5)^2$$



X

а



в



X

Y

б

з

Рис.1.10,2

$$g(x,y) = \frac{1}{(x+1)^1 + (y+1)^1}, \sigma^2 = (0,5)^2$$



X

а

в



X

Y

б

з

Рис.1.10,3

$$g(x,y) = \frac{1}{(x+1)^{0,2} + (y+1)^{0,5}}, \sigma^2 = (0,5)^2$$



X

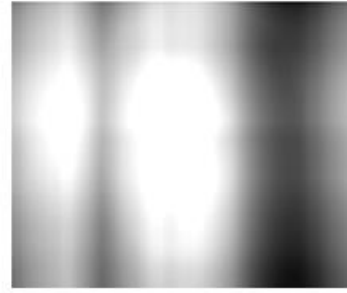
а

в



Sv

б



Y

з

Рис.1.10,4

$$g(x,y) = \frac{1}{(x+1)^{0,2} + (y+1)^{0,2}}, \sigma^2 = (0,1)^2$$



X

а

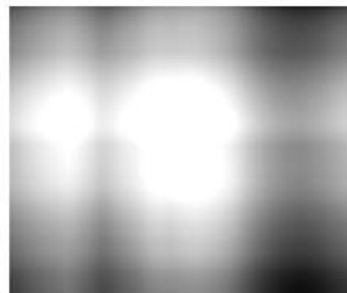


б



Sv

б



Y

з

Рис.1.10,5

$$g(x,y) = \frac{1}{(x+1)^{0,2} + (y+1)^{0,2}}, \sigma^2 = (2,5)^2$$



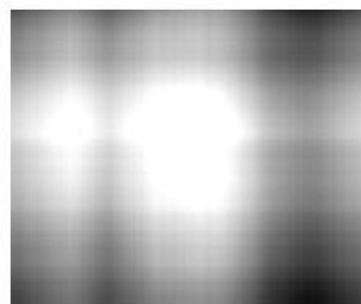
a



b



б



г

Рис. 1.10,6

1.9 Дискретна фільтрація за методом найменших квадратів

Методи реставрації, що були розглянуті вище, базуються на моделі деградації (1.2), (1.40) для **гомогенного** (однорідного) поля образу. В багатьох випадках обробки медичних зображень негомогенністю поля образу знехтувати не можна. Тоді слід використовувати модель (1.1), для якої **теорема про конволюцію оригіналу відсутня**. Тому перехід у частотну область Фур'є (конволюція оригіналів не дорівнює добутку їх спектрів) при такій постановці задачі недоцільний.

У даному розділі розглянемо саме узагальнення Вінерівської фільтрації на випадок обробки образу і шуму в негомогенному полі. Аналогічно можна побудувати алгоритм умовної деконволюції і алгоритм деконволюції по критерію оптимальної імпульсної характеристики за умови негомогенності полів образу і шуму.

Ця умова значно ускладнює задачу, але й робить її значно загальнішою. Друга умова (відсутність теореми про конволюцію оригіналів) значно розширює інструментарій дослідника, оскільки, якщо за нею перехід у частотну область Фур'є не є єдиним можливим способом спрощення

алгоритму, то можна використовувати перетворення з дійсним ядром (Адамара, Хаара і т.ін.).

Для простоти ілюстрації особливостей методу у подальшому будемо розглядати випадок фільтрації одновимірного образу. Для двовимірного образу (скануванням) можна перейти до одновимірного вектора і (враховуючи нюанси такого сканування) одержати той самий алгоритм.

Тобто модель деградації знову має вигляд (1.40)

$$\bar{L} = \bar{\bar{G}} \times \bar{f} + \bar{V}. \quad (1.61)$$

Оскільки у подальшому будемо розглядати дискретні ортогональні перетворення – вектор \bar{f} періодичний, періодичною є кожна реалізація імпульсної характеристики (різної для різних координат дії у вигляді δ -імпульсу).

Як і у випадку перетворення Фур'є (використання якого у даному разі можливе, але недоцільне) алгоритм будь-якого ортогонального перетворення має наступний вигляд.

1. Пряме (дискретне) перетворення деградованого образу

$$\bar{L}_A = \bar{\bar{A}} \times \bar{f}, \quad (1.62)$$

де $\bar{\bar{A}}$ – матриця перетворень (Адамара, Хаара, Фур'є, косинусного, похилого, тощо). Матриця перетворень $\bar{\bar{A}}$ звичайно є унітарною.

2. Корекція у "частотній" області (яку й треба знайти)

$$\bar{L}'_A = \bar{\bar{M}} \times \bar{L}_A, \quad (1.63)$$

тобто матриця $\bar{\bar{M}}$ є матрицею корегуючого фільтра в області трансформант глобального ортогонального перетворення. Якщо, наприклад, поле образу гомогенне (і має сенс використовувати теорему про згортку оригіналів в перетворенні Фур'є), тоді матриця $\bar{\bar{M}}$ є діагональною матрицею дискретів частотної характеристики корегуючого фільтра і у подальшому (за критерієм найменших квадратів), вводячи додаткові обмеження, можна одержати фільтр Вінера.

Для негомогенного поля (для усіх перетворень, для яких відсутня теорема про згортку оригіналів) матриця $\bar{\bar{M}}$ не є діагональною. Фізична інтерпретація такої узагальненої матриці $\bar{\bar{M}}$ незвична: результуюча складова \bar{L}_A^{\square} ("частотна" складова) після фільтрації є функцією не лише відповідної (за номером) нефільтрованої складової \bar{L}'_A , але багатьох або усіх складових. Вибором матриці $\bar{\bar{M}}$ обирають конкретний реставруючий фільтр.

3. Зворотне перетворення

$$\hat{f} = \bar{\bar{A}}^{-1} \times \bar{L}'_A = \bar{\bar{A}}^{-1} \times [\bar{\bar{M}} \times (\bar{\bar{A}} \times \bar{L})]. \quad (1.64)$$

Для визначення матриці $\bar{\bar{M}}$ слід ввести (як і в попередніх методах) додаткову умову. Нехай критерієм оптимальності фільтрації є вимога мінімуму суми квадратів відхилень лінійної оцінки шуканого вектора \hat{f} на базі виміряного вектора \bar{L} . **За принципом ортогональності** цей критерій можна ввести у вигляді математичного очікування

$$\mu\{(\bar{f} - \hat{f}) \times \bar{L}^T\} = \bar{\bar{0}}, \quad (1.65)$$

де $\bar{\bar{0}}$ – квадратна матриця нулів.

Тоді підставленням (1.64) до (1.65), одержимо

$$\mu\{(\bar{f} - \bar{A}^{-1} \times \bar{\bar{M}} \times \bar{A} \times \bar{L}) \times \bar{L}^T\} = \bar{\bar{0}} \quad (1.66)$$

Після підстановки (1.66) до (1.61) одержимо

$$\mu\left\{\left(\bar{f} - \bar{A}^{-1} \times \bar{\bar{M}} \times \bar{A} \times (\bar{G} \times \bar{f} + \bar{V})\right) \times (\bar{G} \times \bar{f} + \bar{V})^T\right\} = \bar{\bar{0}} \quad (1.67)$$

Оскільки \bar{A} , \bar{G} , $\bar{\bar{M}}$ є матрицями констант, їх можна виносити за знак математичного очікування. Шум \bar{V} та сигнал \bar{f} вважаємо **не корельованими**.

Позначимо математичні очікування

$$\mu\{\bar{f} \times \bar{f}^T\} = \bar{\bar{R}}_{ff}; \quad (1.68,a)$$

$$\mu\{\bar{V} \times \bar{V}^T\} = \bar{\bar{R}}_{vv} \quad (1.68,b)$$

де $\bar{\bar{R}}_{ff}$, $\bar{\bar{R}}_{vv}$ – кореляційні матриці сигналу \bar{f} і шуму \bar{V} відповідно.

Тоді з (1.64) можна одержати

$$\bar{\bar{M}} = \bar{A} \times \bar{\bar{R}}_{ff} \times \bar{G}^T \times (\bar{G} \times \bar{\bar{R}}_{ff} \times \bar{G}^T + \bar{\bar{R}}_{vv})^{-1} \times \bar{A}^{-1}. \quad (1.69,a)$$

Після множень на одиничні матриці

$$\bar{\bar{E}} = \bar{A} \times \bar{A}^{-1} \text{ або } \bar{\bar{E}} = \bar{A}^{-1} \times \bar{A}$$

Одержимо

$$\begin{aligned} \bar{\bar{M}} = & \bar{A} \times \bar{\bar{R}}_{ff} \times \bar{A}^{-1} \times \bar{A} \times \bar{G}^T \times \bar{A}^{-1} \times \bar{A} \times (\bar{G} \times \bar{A}^{-1} \times \bar{A} \times \bar{\bar{R}}_{ff} \times \bar{A}^{-1} \times \bar{A} \times \bar{G}^T + \\ & + \bar{\bar{R}}_{vv})^{-1} \times \bar{A}^{-1} (\bar{A} \bar{\bar{R}}_{ff} \bar{A}^{-1}) \times (\bar{A} \bar{G}^T \bar{A}^{-1}) \times \left[(\bar{A} \bar{G} \bar{A}^{-1}) \times (\bar{A} \bar{\bar{R}}_{ff} \bar{A}^{-1}) \times (\bar{A} \bar{G}^T \bar{A}^{-1}) + \right. \\ & \left. + (\bar{A}) \bar{\bar{R}}_{vv} \bar{A}^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.69,b)$$

Введемо визначення (аналогічні енергетичному спектру Вінера-Хінчина) для матриці перетворення у "частотну" область $\bar{\bar{A}}$

$$\bar{\bar{S}}_{ff} = \bar{A} \times \bar{\bar{R}}_{ff} \times \bar{A}^{-1}; \quad (1.70,a)$$

$$\bar{\bar{K}} = \bar{A} \times \bar{G} \times \bar{A}^{-1}; \quad (1.70,b)$$

$$\bar{\bar{K}}^* = \bar{A} \times \bar{G}^T \times \bar{A}^{-1} \quad (1.70,v)$$

Тут $\bar{\bar{K}}^*$ – аналог "спряженню" (за Фур'є) спектра.

Тоді (з урахуванням (1.64), (1.70)) одержимо для корегуючої матриці $\bar{\bar{M}}$

$$\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{S}}_{ff} \times \bar{\bar{K}}^* (\bar{\bar{K}} \times \bar{\bar{S}}_{ff} \times \bar{\bar{K}}^* + \bar{\bar{S}}_{vv})^{-1} \quad (1.71)$$

Одержаний вираз у матричному вигляді нагадує Вінерівський фільтр, але він вірний для довільного "частотного" базису (Адамара, Хаара, похилого

перетворення, тощо). Цей вираз вірний і для базису Фур'є у гомогенному полі, але в Фур'є-області матриці $\bar{S}, \bar{K}, \bar{K}^*$ мають діагональну структуру (тобто всі елементи цих матриць крім елементів головної діагоналі нульові і тому перемноження матриць відповідає перемноженню однакових за номером - частотою елементів діагоналі). Тому вираз (1.71) для базису Фур'є (тобто для перетворення Фур'є-образу в гомогенному полі) дуже сильно спрощується і набуває вигляду

$$M(n) = \frac{G^*(n)}{|G(n)|^2 + \frac{S_{vv}(n)}{S_{ff}(n)}} \quad (1.72,a)$$

або для двовимірного образу

$$M(m, n) = \frac{G^*(m, n)}{|G(m, n)|^2 + \frac{S_{vv}(m, n)}{S_{ff}(m, n)}}. \quad (1.72,b)$$

Для випадку нехомогенного поля образу на відміну від (1.72,a,b) у виразі (6.86) **усі матриці недіагональні**. Це значно ускладнює операції над одержаним узагальненим виразом, особливо у двовимірному випадку, оскільки, якщо діагональ матриці \bar{M} Вінерівського фільтра має той самий формат N , що й шуканий сигнал \bar{f} , то в матрицях (1.71) матриця \bar{M} має N^2 ненульових елементів.

На завершення наведемо деякі властивості методу:

1) узагальнена дискретна фільтрація є значно **універсальнішою**, ніж Вінерівська фільтрація, оскільки **виключає вимогу гомогенності** поля (особливо це важливо для двовимірних образів). Тобто Вінерівська фільтрація є частковим випадком узагальненої щодо базису (Фур'є) і умови гомогенності поля образу фільтрації. Додамо, що гомогенність поля образу практично ніколи не виконується. З іншого боку, така фільтрація має операнди-матриці з квадратично зростаючими порядками, що значно ускладнює її реалізацію;

2) обчислення кореляційних матриць для побудови фільтра є окремою проблемою, оскільки, якщо **поля нехомогенні**, то вони й **не ергодичні**. Тому треба знаходити **середнє за ансамблем**. Це виключає можливість використання узагальненої фільтрації, якщо в наявності є мала кількість реалізацій образу і шуму;

3) позитивною властивістю методу є те, що \bar{A} – **це матриця довільного глобального ортогонального перетворення**. При цьому трудомісткість обчислень, наприклад, при використанні перетворення Адамара може бути суттєво зменшена;

4) у деяких випадках алгоритм можна спростити. Так, якщо $\bar{\bar{G}} = \bar{\bar{E}}$, тобто деградація має місце лише за рахунок адитивного шуму, можливе значне зменшення кількості операцій. У цьому випадку

$$\begin{aligned}\bar{\bar{M}} &= \bar{\bar{A}} \times \bar{\bar{R}}_{ff} \times (\bar{\bar{R}}_{ff} + \bar{\bar{R}}_{vv})^{-1} \times \bar{\bar{A}}^{-1} = \bar{\bar{A}} \times \bar{\bar{R}}_{ff} \times \bar{\bar{A}}^{-1} \times \bar{\bar{A}} \times (\bar{\bar{R}}_{ff} + \bar{\bar{R}}_{vv})^{-1} \times \bar{\bar{A}}^{-1} = \\ &= S_{ff} \times (\bar{\bar{S}}_{ff} + \bar{\bar{S}}_{vv})^{-1}\end{aligned}\quad (1.73)$$

РОЗДІЛ 2. НОРМАЛІЗАЦІЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ. НОРМАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ

2.1 Вступні зауваження

Ортогональні перетворення часто використовують для оцінки змін в графоелементах досліджуваних сигналів, коли ці зміни не дуже помітні в натуральних координатах.

Так, наприклад, спотворення форми електричного гармонічного струму, «на око» можуть бути не помітними, в той час, як на спектрі Фур'є відсутність чи наявність складових кратних частот (з амплітудами I_i) є помітною і, до того ж, може бути чисельно оцінена коефіцієнтом гармонік

$$k_r = \sqrt{\sum_{i=2}^{N-1} I_i^2 / I_1}. \quad (2.1)$$

Зручність оцінки спотворень у приведеному прикладі зумовлена тим, що форма ідеального досліджуваного сигналу співпадає із формою однієї (першої) з трансформант ряду Фур'є. На жаль, еталони досліджуваних радіотехнічних, біомедичних та інших сигналів зазвичай не співпадають по формі із трансформантами існуючих ортогональних перетворень, не зважаючи на велику кількість таких перетворень.

Універсальний характер перетворень призводить до того, що певні графоелементи «розмиваються» в області трансформант і стають непомітними. Зміни в області трансформант стають тим помітнішими, чим менше домінантних (тобто таких, що значно більші за інші) трансформант (інакше кажучи, чим вузький ефективний спектр перетворення) знаходяться в спектрі досліджуваного сигналу. Це сприяло спробам (часто успішним) використання перетворень, відмінних від перетворень Фур'є і, як вже згадувалося, було знайдено, що зручним для аналізу сигналів зв'язку є перетворення Уолша, а біосигналів – косинусне перетворення.

Тому велике значення має створення таких дискретних ортогональних перетворень, які б мали трансформанти, що співпадають (або у певному сенсі співпадають) з еталонами досліджуваних сигналів.

2.1.1 Нормалізація дискретного ортогонального перетворення за кроком

Для нормалізації перетворення повинен бути наданий еталонний сигнал, порівняння з яким досліджуваного сигналу і має дати відповідь на питання про ступінь відмінності або співпадіння цих двох сигналів. Такий еталонний сигнал слід нормувати таким чином, щоб його максимальне та мінімальне значення дорівнювали $+1$ та -1 відповідно, що приведе його динамічний діапазон до динамічного діапазону трансформанти обраного для нормалізації ортогонального перетворення.

Для подальшого пояснення процедури нормалізації за кроком розглянемо простий трикутний сигнал (рис.2.1,*a*), нормований таким чином, що його динамічний діапазон займає інтервал ± 1 . Довжина сигналу тотожна періоду обраної ортогональної функції з використовуваного перетворення (рис.2.1,*б*).

Для простоти демонстрації ідеї нормалізації розглянемо дискретне косинусне перетворення формату $N = 8$. Матричний оператор $\overline{\overline{Cs}}$ такого косинусного перетворення наведено в таблиці 2.1. Точки $0 - 7$ (рис.2.1,*б*) відповідають стовпцям табл.2.1, значення дискретних відліків (рис.2.1,*б*) спроеціюємо (горизонтальні штрихові лінії) на нормований трикутник (рис.2.1,*a*). Отримані на рис.2.1,*a* точки відліків на трикутниках позначимо зірочками.

Оскільки тестовим є трикутний сигнал, то нумерацію відліків слід привести до номерів, позначених штрихами. Ці номери відповідають новим номерам на косинусній трансформанті (теж позначені штрихами на рис. 2.1,*б*). З рис.2.1,*a* видно, що інтервали дискретизації трикутного сигналу стали нееквідистантними. Ці інтервали повинні також бути розраховані і надані (для даного еталонного сигналу) у вигляді таблиці.

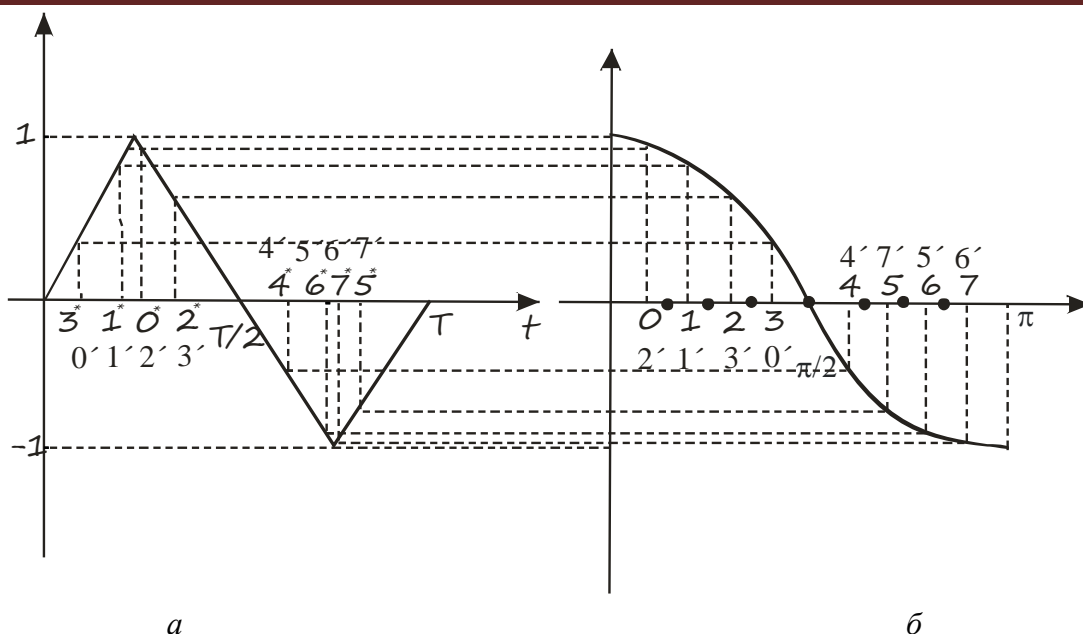


Рис.2.1 Нормований сигнал трикутної форми (а) і перша трансформанта косинусного перетворення (б).

Нормалізація дискретного косинусного перетворення тепер полягає у переставленні стовпців дискретного оператора $\overline{\overline{CS}}$ (таблиця 2.1) у відповідності до нової нумерації (штрихами). Дискретний нормалізований матричний оператор $\overline{\overline{CS}}_N$, отриманий з оператора $\overline{\overline{CS}}$ (таблиця 2.1), наведено у таблиці 2.2.

Якщо взяти елементи рядка 1 у таблиці 2.2 і (з урахуванням нееквідистантних кроків дискретизації) розташувати їх вздовж осі часу, отримаємо дискретизований трикутний сигнал рис.2.1,а.

Таблиця 2.1.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	$\cos \frac{\pi}{16}$	$\cos \frac{3\pi}{16}$	$\cos \frac{5\pi}{16}$	$\cos \frac{7\pi}{16}$	$\cos \frac{9\pi}{16}$	$\cos \frac{11\pi}{16}$	$\cos \frac{13\pi}{16}$	$\cos \frac{15\pi}{16}$
2	$\cos \frac{2\pi}{16}$	$\cos \frac{6\pi}{16}$	$\cos \frac{10\pi}{16}$	$\cos \frac{14\pi}{16}$	$\cos \frac{18\pi}{16}$	$\cos \frac{22\pi}{16}$	$\cos \frac{26\pi}{16}$	$\cos \frac{30\pi}{16}$
3	$\cos \frac{3\pi}{16}$	$\cos \frac{9\pi}{16}$	$\cos \frac{15\pi}{16}$	$\cos \frac{21\pi}{16}$	$\cos \frac{27\pi}{16}$	$\cos \frac{33\pi}{16}$	$\cos \frac{39\pi}{16}$	$\cos \frac{45\pi}{16}$
4	$\cos \frac{4\pi}{16}$	$\cos \frac{12\pi}{16}$	$\cos \frac{20\pi}{16}$	$\cos \frac{28\pi}{16}$	$\cos \frac{36\pi}{16}$	$\cos \frac{44\pi}{16}$	$\cos \frac{52\pi}{16}$	$\cos \frac{60\pi}{16}$
5	$\cos \frac{5\pi}{16}$	$\cos \frac{15\pi}{16}$	$\cos \frac{25\pi}{16}$	$\cos \frac{35\pi}{16}$	$\cos \frac{45\pi}{16}$	$\cos \frac{55\pi}{16}$	$\cos \frac{65\pi}{16}$	$\cos \frac{75\pi}{16}$
6	$\cos \frac{6\pi}{16}$	$\cos \frac{18\pi}{16}$	$\cos \frac{30\pi}{16}$	$\cos \frac{42\pi}{16}$	$\cos \frac{54\pi}{16}$	$\cos \frac{66\pi}{16}$	$\cos \frac{78\pi}{16}$	$\cos \frac{80\pi}{16}$
7	$\cos \frac{7\pi}{16}$	$\cos \frac{21\pi}{16}$	$\cos \frac{35\pi}{16}$	$\cos \frac{49\pi}{16}$	$\cos \frac{63\pi}{16}$	$\cos \frac{77\pi}{16}$	$\cos \frac{91\pi}{16}$	$\cos \frac{105\pi}{16}$

Таблиця 2.2.

	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'
0'	1	1	1	1	1	1	1	1
1'	$\cos \frac{5\pi}{16}$	$\cos \frac{3\pi}{16}$	$\cos \frac{7\pi}{16}$	$\cos \frac{\pi}{16}$	$\cos \frac{9\pi}{16}$	$\cos \frac{15\pi}{16}$	$\cos \frac{11\pi}{16}$	$\cos \frac{13\pi}{16}$
2'	$\cos \frac{10\pi}{16}$	$\cos \frac{6\pi}{16}$	$\cos \frac{14\pi}{16}$	$\cos \frac{2\pi}{16}$	$\cos \frac{18\pi}{16}$	$\cos \frac{30\pi}{16}$	$\cos \frac{22\pi}{16}$	$\cos \frac{26\pi}{16}$
3'	$\cos \frac{15\pi}{16}$	$\cos \frac{9\pi}{16}$	$\cos \frac{21\pi}{16}$	$\cos \frac{3\pi}{16}$	$\cos \frac{27\pi}{16}$	$\cos \frac{45\pi}{16}$	$\cos \frac{33\pi}{16}$	$\cos \frac{39\pi}{16}$
4'	$\cos \frac{20\pi}{16}$	$\cos \frac{12\pi}{16}$	$\cos \frac{28\pi}{16}$	$\cos \frac{4\pi}{16}$	$\cos \frac{36\pi}{16}$	$\cos \frac{60\pi}{16}$	$\cos \frac{44\pi}{16}$	$\cos \frac{52\pi}{16}$
5'	$\cos \frac{25\pi}{16}$	$\cos \frac{15\pi}{16}$	$\cos \frac{35\pi}{16}$	$\cos \frac{5\pi}{16}$	$\cos \frac{45\pi}{16}$	$\cos \frac{75\pi}{16}$	$\cos \frac{55\pi}{16}$	$\cos \frac{65\pi}{16}$
6'	$\cos \frac{30\pi}{16}$	$\cos \frac{18\pi}{16}$	$\cos \frac{42\pi}{16}$	$\cos \frac{6\pi}{16}$	$\cos \frac{54\pi}{16}$	$\cos \frac{90\pi}{16}$	$\cos \frac{66\pi}{16}$	$\cos \frac{78\pi}{16}$
7'	$\cos \frac{35\pi}{16}$	$\cos \frac{21\pi}{16}$	$\cos \frac{49\pi}{16}$	$\cos \frac{7\pi}{16}$	$\cos \frac{63\pi}{16}$	$\cos \frac{105\pi}{16}$	$\cos \frac{77\pi}{16}$	$\cos \frac{91\pi}{16}$

Тепер, якщо досліджуваний сигнал відрізняється від еталонного тільки масштабним множником і постійною складовою, то добутки відліків взятих з цього досліджуваного сигналу (з відомим нееквідистантним кроком) дадуть нульову (за номером) і першу трансформанту. Усі інші трансформанти нормалізованого перетворення дорівнюватимуть нулю.

Якщо форма сигналу (внаслідок певних неістотних спотворень) буде незначною мірою відрізнятися від форми еталонного, то ненульовими будуть і інші (крім першої і нульової) трансформанти. Якщо відміни будуть суттєві, то вищі трансформанти будуть мати великі амплітуди.

Ступінь відміни форми досліджуваного сигналу від еталонного можна кількісно оцінити за допомогою коефіцієнта трансформант

$$k_{\text{тр}} = \sqrt{\sum_{k=0, k \neq 1}^{N-1} I_k^2 \times \varepsilon_k^2} / (I_1 \times \varepsilon_1), \quad (2.2)$$

де I_k – амплітуда k -ї трансформанти; ε_k – енергія k -ї трансформанти одиничної амплітуди.

Формула (2.2) є зручною для оцінки спотворень при використанні для аналізу тих самих сигналів різних ортогональних перетворень.

Енергію трансформанти одиничної амплітуди можна розрахувати за формулою

$$\varepsilon_k^2 = \sum_{n=0}^{N-1} s_k^2(n) \times \Delta t, \quad (2.3)$$

де $s_k(n)$ – відлік n -ї трансформанти.

Якщо різні сигнали порівнюються за єдиним нормалізованим перетворенням, можна використовувати спрощену форму коефіцієнта трансформації

$$k_{\text{тр}} = \sqrt{\sum_{k=2}^{N-1} I_k^2} / I_1. \quad (2.4)$$

Часто при пошуку сигналів, які певною мірою співпадають із еталонним зручно використовувати зворотну до коефіцієнта трансформант гостроту.

$$\Gamma = 1/k_{\text{тр}}. \quad (2.5)$$

В цьому випадку перевищення гостротою певного наперед наданого порогу дозволяє зробити висновок про наявність сигналу, близького до тестового (еталонного) і навпаки.

На завершення нагадаємо, що єдиною незручністю методу нормалізації за кроком є нееквідистантний крок дискретизації, що може бути незручно при дискретизації сигналу стандартними пристроями.

2.1.2 Нормалізація тестового сигналу за рівнем

Для кращого розуміння основні положення методу будемо розглядати на прикладі конкретного обраного ортогонального перетворення. Для цього оберемо перетворення Уолша-Корчмаржа, деякі з трансформант якого (при дискретизації) зображені на рис.1.10. Для таких функцій нормалізацію “за кроком” виконати неможливо (оскільки трансформанти мають лише два значення: +1, -1).

Нехай тестовий сигнал має вигляд рис.2.3, а формати (кількість відліків) тестового сигналу і функції Уолша – наприклад, ψ_1 (рис.2.2), однакові.

Поділимо відліки x_{test} на рис.2.3 на корегуючі коефіцієнти

$$k_n = \frac{x_{\text{test}}(n)}{\psi(n)}, \quad k_n = x_{\text{test}}(n)/\psi(n) \quad (2.6)$$

Тоді сигнал рис.2.3 перетвориться на функцію ψ_1 на рис.2.2. Корегуючі коефіцієнти наведено в табл.2.3.

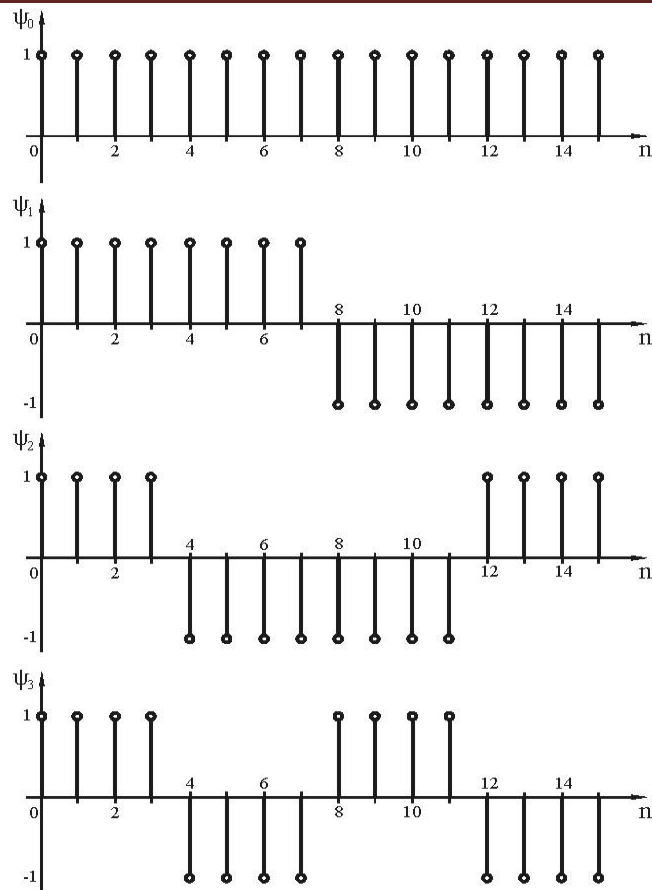


Рис.2.2

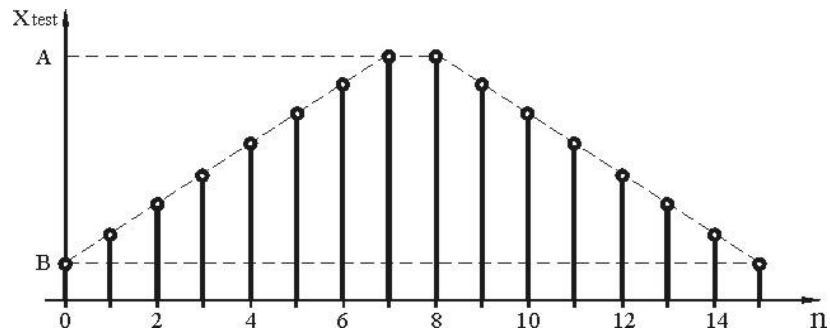


Рис.2.3

Таблиця 2.3

k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
B	B $+(A - B)/7$	B $+2(A - B)/7$	B $+3(A - B)/7$	B $+4(A - B)/7$	B $+5(A - B)/7$	B $+6(A - B)/7$	A
k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}
$-A$	$-B$ $-6(A - B)/7$	$-B$ $-5(A - B)/7$	$-B$ $-4(A - B)/7$	$-B$ $-3(A - B)/7$	$-B$ $-2(A - B)/7$	$-B$ $-(A - B)/7$	$-B$

Алгоритм нормалізації за рівнем має наступний вигляд.

1. Для тестового сигналу (відповідним чином нормованого) обрати ортогональне перетворення та базову трансформанту перетворення.

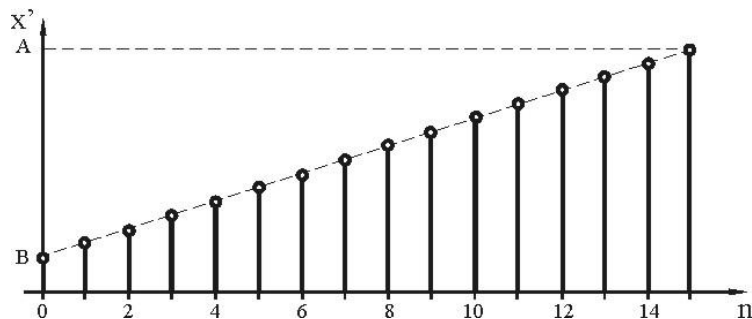
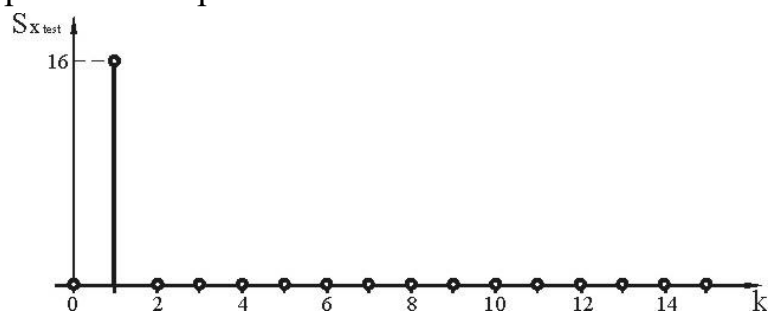
2. Для кожного з N відліків тестового сигналу і трансформанти знайти корегуючі коефіцієнти.

3. Поділити відліки невідомого досліджуваного сигналу на корегуючі коефіцієнти (якщо сигнал відрізняється від тестового лише амплітудою, одержимо трансформанту дискретного ортогонального перетворення тієї самої амплітуди).

4. Виконати глобальне перетворення скорегованого досліджуваного сигналу.

5. Якщо спектр перетворення містить лише амплітуду трансформанти, за якою проведено нормалізацію, то досліджуваний сигнал (з точністю до амплітуди) тотожний до тестового. Якщо спектр багатий і має велику кількість трансформант, співмірних з базовою для нормалізації, то досліджується сигнал, навіть не схожий на тестовий.

Так, наприклад, перетворення Уолша-Корчмаржа для сигналу x_{test} , зображеного на рис.2.3 ($B=1$, $A=8$), після його нормалізації за трансформантою ψ_1 (рис.2.3) має вигляд рис.2.4. В той самий час для сигналу, зображеного на рис.2.5, одержимо спектр рис.2.6. Для сигналу, зображеного на рис.2.7, з адитивним шумом ($\sigma = 0,244923B$, значення відліків шуму $N(n)$ наведено в табл.2.4) отримаємо спектр нормалізованого перетворення, зображений на рис.2.8.



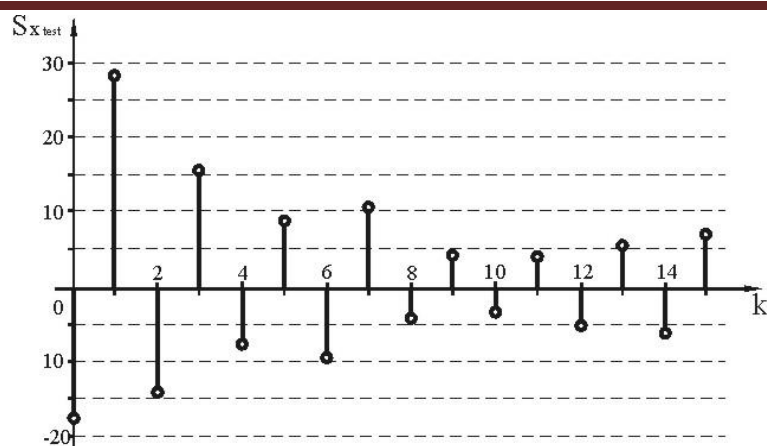


Рис.2.6

Табл.2.4

N_0	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7
0	0.25	0.28	-0.19	-0.21	0.20	-0.19	-0.11

N_8	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	N_{15}
0.03	-0.50	0.48	0.37	-0.19	-0.38	0.22	0.05

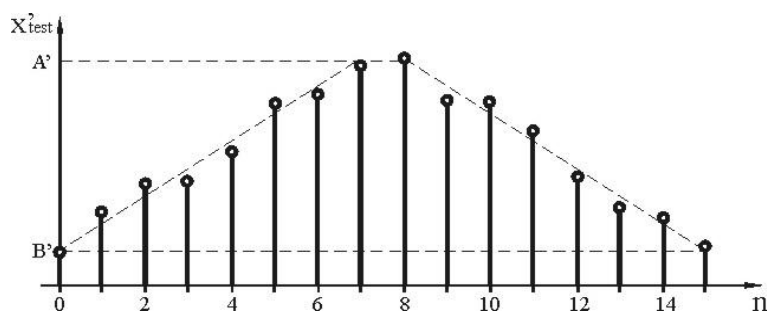


Рис.2.7

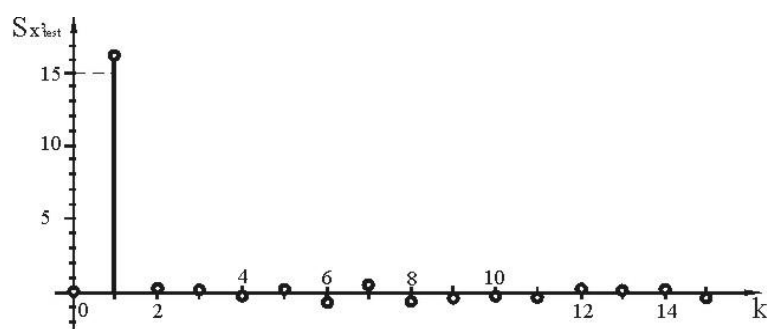


Рис.2.8

На практиці може виникнути ситуація, коли сигнал, який досліджується, відрізняється від тестового на масштабний множник або містить “додаткову” постійну складову. Такий сигнал, змінений за допомогою масштабного множника і складової, насправді є тим сигналом, який нам потрібно знайти при обробці. Якщо в якості тестового сигналу виступають елементи зображення, то зміна масштабного множника

відповідає зміні контрасту зображення, а додаткова постійна складова впливає на яскравість, тобто розбавленість зображення білим. Для того, щоб такий сигнал в результаті виконання нормалізованого перетворення Уолша-Корчмаржа був визнаний за тестовий, потрібно його центрувати (тобто знайти постійну складову досліджуваного сигналу і відняти її від досліджуваного сигналу), аналогічно, центрованим повинен бути і еталонний сигнал. При цьому обчислювати спектр і гостроту слід саме для такої пари сигналів. При наявності стаціонарного адитивного шуму з шумовим середнім, його додавання до досліджуваного сигналу не вплине на масштабування коефіцієнтів нормалізації.

Оцінку відмін сигналів (викликаних спотвореннями каналів передачі, адитивним шумом тощо) також можна провести за коефіцієнтом трансформант:

$$k_{\text{тр}} = \sqrt{\sum_{i \neq n}^{N-1} A_i^2} / A_n, \quad (2.7)$$

де A_n – амплітуда трансформанти, за якою проводилася нормалізація.

Так, для сигналу рис.2.3 $k_{\text{тр}}=0$, для сигналу рис.2.7 $k_{\text{тр}}=1.232945$, а для сигналу рис. 2.5 $k_{\text{тр}} \gg 1$.

Наведений приклад нормалізації, що ілюструє запропонований метод, побудовано на трансформанті перетворення Уолша-Корчмаржа, але ясно, що як базову можна прийняти трансформанту будь-якого ортогонального перетворення.

2.2 Нормальне перетворення тестового сигналу

2.2.1 Нормальне одновимірне перетворення

Розглянемо можливість створення дискретного ортогонального перетворення, для якого одна із трансформант збігалася б з наперед заданим дискретним сигналом довільної форми, а, отже, спектр такого перетворення містив би лише одну ненульову складову. Таке ортогональне перетворення у подальшому будемо називати нормальним.

2.2.1.1 Матричний оператор дискретного нормального перетворення першого виду

Для визначеності й наочності ілюстрації процедури побудови нормального перетворення виберемо формат перетворення N рівним восьми (що дозволить надалі узагальнити отриманий результат на довільний формат $N=2^n$, де n – ціле додатне число). Формат перетворення і формат сигналу збігаються. Тому нехай сигнал $x(t)$ на періоді, рівному тривалості сигналу, задано вектором відліків $\overline{X_0} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, де T – знак транспонування.

Для формату $N=8$ $\overline{X_0} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T$.

Для одержання нормального перетворення сигналу $\overline{X_0}$ проведемо ряд перетворень, при кожному з яких кількість ненульових трансформант у порівнянні з вихідним сигналом буде зменшуватися вдвічі.

Першим з таких перетворень $\overline{W_1}$ буде блочно-діагональна матриця, головна діагональ якої складається із блоків $\overline{W_1}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{i+1} & x_{i+2} \\ -x_{i+2} & x_{i+1} \end{bmatrix}$.

Для формату $N=8$ ця матриця матиме вигляд

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x_1	x_2	0	0	0	0	0	0
2	$-x_2$	x_1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	x_3	x_4	0	0	0	0
4	0	0	$-x_4$	x_3	0	0	0	0
5	0	0	0	0	x_5	x_6	0	0
6	0	0	0	0	$-x_6$	x_5	0	0
7	0	0	0	0	0	0	x_7	x_8
8	0	0	0	0	0	0	$-x_8$	x_7

Для забезпечення ортогональності рядків матриці $\overline{W_1}$ достатньо забезпечити ортогональність лише кожної пари рядків: 1-го та 2-го, 3-го та 4-го, 5-го та 6-го і т.д., оскільки рядки 1 і 2 завжди ортогональні по відношенню до рядків 3, 4, 5, 6 тощо внаслідок того, що вони належать до різних блоків діагоналі матриці $\overline{W_1}$.

Так, при перевірці на ортогональність першого рядка з другим та третього з четвертим, отримаємо скалярні добутки:

$$x_1(-x_2) + x_2x_1 = 0 \text{ і } x_3(-x_4) + x_4x_3 = 0.$$

У результаті перемноження матриці $\overline{W_1}$ і вектора $\overline{X_0}$ одержимо стовпець першого (із серії) перетворення $\overline{X_1} = \overline{W_1} \cdot \overline{X_0}$, де для $N=8$

$$\overline{X_1} = [(x_1^2 + x_2^2), 0, (x_3^2 + x_4^2), 0, (x_5^2 + x_6^2), 0, (x_7^2 + x_8^2), 0]^T.$$

Для забезпечення ортогональності кратного перетворення матрицю $\overline{W_1}$ слід нормувати, для чого знайдемо добуток $\overline{W_1} \cdot \overline{W_1}^T = \text{diag}\{\varepsilon_1\}$, де $\text{diag}\{\varepsilon_1\}$ -

діагональна матриця з елементами головної діагоналі $(x_1^2 + x_2^2)$, $(x_1^2 + x_2^2)$, $(x_3^2 + x_4^2)$, $(x_3^2 + x_4^2)$, $(x_5^2 + x_6^2)$, $(x_5^2 + x_6^2)$, $(x_7^2 + x_8^2)$, $(x_7^2 + x_8^2)$.

Поділивши рядки матриці $\overline{\overline{W}}_1$ на відповідні значення $(x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2)^{1/2}$ діагоналі, одержимо матрицю $\overline{\overline{W}}_{1N}$, таку, що $\overline{\overline{W}}_{1N} \cdot \overline{\overline{W}}_{1N}^T = \overline{\overline{W}}_{1N}^T \cdot \overline{\overline{W}}_{1N} = \overline{\overline{E}}$, де $\overline{\overline{E}}$ - одинична матриця. Для $N=8$ матриця $\overline{\overline{W}}_{1N}$ представляє собою:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x_1/a	x_2/a	0	0	0	0	0	0
2	$-x_2/a$	x_1/a	0	0	0	0	0	0
3	0	0	x_3/b	x_4/b	0	0	0	0
4	0	0	$-x_4/b$	x_3/b	0	0	0	0
5	0	0	0	0	x_5/c	x_6/c	0	0
6	0	0	0	0	$-x_6/c$	x_5/c	0	0
7	0	0	0	0	0	0	x_7/d	x_8/d
8	0	0	0	0	0	0	$-x_8/d$	x_7/d

де $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $c = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$, $d = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$.

Тоді частково нормалізований (із чотирма нульовими значеннями) спектр $\overline{X}_{1N} = \overline{\overline{W}}_{1N} \cdot \overline{X}_0$ має вигляд

$$\overline{X}_{1N} = [\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, 0, \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, 0, \sqrt{x_5^2 + x_6^2}, 0, \sqrt{x_7^2 + x_8^2}, 0]^T.$$

Для перетворення ненульових значень сигналу \overline{X}_{1N} побудуємо матрицю $\overline{\overline{W}}_2$, аналогічно тому, як це було зроблено для матриці $\overline{\overline{W}}_1$. Тобто друге перетворення $\overline{\overline{W}}_2$ являє собою матрицю, де елементи, номери рядків і стовпців яких відповідають ненульовим елементам вектора \overline{X}_{1N} , мають значення $w_{11} = w_{33} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $w_{13} = -w_{31} = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $w_{55} = w_{77} = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$, $w_{57} = -w_{75} = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$. Діагональні ж елементи, що відповідають нулям вектора \overline{X}_{1N} , у загальному випадку можна замінити будь-якими числами, оскільки це не вплине на результат другого перетворення. Але залишити їх нульовими не можна, оскільки результуючу матрицю $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N}$ нормального перетворення будемо одержувати

перемноженням матриць всіх часткових перетворень $\overline{\overline{W}}_{iN}$. А $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N}$ не повинна містити нульових рядків або(та) стовпців, оскільки при цьому матриця зворотного перетворення $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N}^{-1}$ не існуватиме.

У даному випадку покладемо діагональні елементи матриці $\overline{\overline{W}}_2$, що відповідають нулям вектора \overline{X}_{1N} , рівними одиницям. Матричний оператор нормального перетворення, що спиратиметься на таку матрицю $\overline{\overline{W}}_2$ часткового перетворення назвемо матричним оператором першого виду.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$	0	$\sqrt{x_3^2 + x_4^2}$	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0
3	$-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}$	0	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	$\sqrt{x_5^2 + x_6^2}$	0	$\sqrt{x_7^2 + x_8^2}$	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	$-\sqrt{x_7^2 + x_8^2}$	0	$\sqrt{x_5^2 + x_6^2}$	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1

Тепер спектр \overline{X}_2 другого часткового перетворення $\overline{\overline{W}}_2 \cdot \overline{X}_1 = \overline{X}_2$

$$\overline{X}_2 = \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), 0, 0, 0, (x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 0, 0, 0 \right]^T.$$

Пронормуємо $\overline{\overline{W}}_2$:

$$\overline{\overline{W}}_2 \cdot \overline{\overline{W}}_2^T = \text{Diag} \left\{ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), 1, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), 1, (x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 1, (x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 1 \right\}.$$

Тобто при нормуванні перший та третій рядки матриці $\overline{\overline{W}}_2$ слід розділити на $\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, а п'ятий та сьомий відповідно на $\beta = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$. Таким чином отримаємо нормовану матрицю $\overline{\overline{W}}_{2N}$

Після відповідного нормування матриці другого перетворення одержимо вектор \overline{X}_{2N} , що містить ненульові елементи в першому рядку

$$x_{N2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \text{ і в п'ятому рядку } x_{N5} = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$$

$$\overline{X_{2N}} = [\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}, 0, 0, 0, \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}, 0, 0, 0]^T.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{W_{2N}} =$	1							
	$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\alpha}$	0	$\frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\alpha}$	0	0	0	0	0
	2	0	1	0	0	0	0	0
	3	$-\frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\alpha}$	0	$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\alpha}$	0	0	0	0
	4	0	0	0	1	0	0	0
	5	0	0	0	$\frac{\sqrt{x_5^2 + x_6^2}}{\beta}$	0	$\frac{\sqrt{x_7^2 + x_8^2}}{\beta}$	0
	6	0	0	0	0	0	1	0
	7	0	0	0	$-\frac{\sqrt{x_7^2 + x_8^2}}{\beta}$	0	$\frac{\sqrt{x_5^2 + x_6^2}}{\beta}$	0
	8	0	0	0	0	0	0	1

Для двох ненульових елементів, що залишилися, побудуємо матрицю

$\overline{W_3}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{W_3} =$	1							
	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$	0	0	0	$\sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$	0	0	0
	2	0	1	0	0	0	0	0
	3	0	0	1	0	0	0	0
	4	0	0	0	1	0	0	0
	5	$-\sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$	0	0	0	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$	0	0
	6	0	0	0	0	0	1	0
	7	0	0	0	0	0	0	1
	8	0	0	0	0	0	0	0

$$\overline{W_3} \cdot \overline{W_3}^T = \text{Diag}\left\{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\right), 1, 1, 1, \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\right), 1, 1, 1\right\}.$$

Аналогічно до попередніх кроків, після нормування одержимо $\overline{W_{3N}}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{\bar{W}}_{3N} =$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}{A}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}}{A}$	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0
5	$-\frac{\sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}}{A}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}{A}$	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1

де $A = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$.

Результуюче нормальне перетворення має вигляд

$$\bar{\bar{W}}_{\Sigma N} = \bar{\bar{W}}_{3N} \cdot \bar{\bar{W}}_{2N} \cdot \bar{\bar{W}}_{1N}, \quad (2.8)$$

де

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{\bar{W}}_{\Sigma N} =$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{x_1}{A}$	$\frac{x_2}{A}$	$\frac{x_3}{A}$	$\frac{x_4}{A}$	$\frac{x_5}{A}$	$\frac{x_6}{A}$	$\frac{x_7}{A}$	$\frac{x_8}{A}$
2	$\frac{-x_2}{a}$	$\frac{x_1}{a}$	0	0	0	0	0	0
3	$\frac{-x_1 \cdot b}{a \cdot \alpha}$	$\frac{-x_2 \cdot b}{a \cdot \alpha}$	$\frac{x_3 \cdot a}{b \cdot \alpha}$	$\frac{x_4 \cdot a}{b \cdot \alpha}$	0	0	0	0
4	0	0	$\frac{-x_4}{b}$	$\frac{x_3}{b}$	0	0	0	0
5	$\frac{-x_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{-x_2 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{-x_3 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{-x_4 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{x_5 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$	$\frac{x_6 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$	$\frac{x_7 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$	$\frac{x_8 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$
6	0	0	0	0	$\frac{-x_6}{c}$	$\frac{x_5}{c}$	0	0
7	0	0	0	0	$\frac{-x_5 \cdot d}{c \cdot \beta}$	$\frac{-x_6 \cdot d}{c \cdot \beta}$	$\frac{x_7 \cdot c}{d \cdot \beta}$	$\frac{x_8 \cdot c}{d \cdot \beta}$
8	0	0	0	0	0	0	$\frac{-x_8}{d}$	$\frac{x_7}{d}$

$$\text{де } a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, c = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}, d = \sqrt{x_7^2 + x_8^2},$$

$$\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}, \beta = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}, A = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2},$$

а спектр отриманого нормального перетворення $\overline{X_{NN}}$ буде являти собою

$$\overline{W_{\Sigma N}} \cdot \overline{X_0} = \overline{X_{NN}} = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^T.$$

При великому форматі N сигналу $\overline{X_0}$, кількість часткових перетворень $\overline{W_{iN}}$ при формуванні матричного оператора нормального перетворення в (2.8) збільшиться, тобто для формату $N=2^n$ кількість часткових операторів буде дорівнювати n .

Приклад 2.1. Як приклад побудови трансформант нормального перетворення розглянемо математичне очікування періоду пульсової хвилі людини до паління (рис. 2.9), віднесену до нульового початкового відліку, зведену до одиничної величини розмаху та представлену у форматі $N=32$.

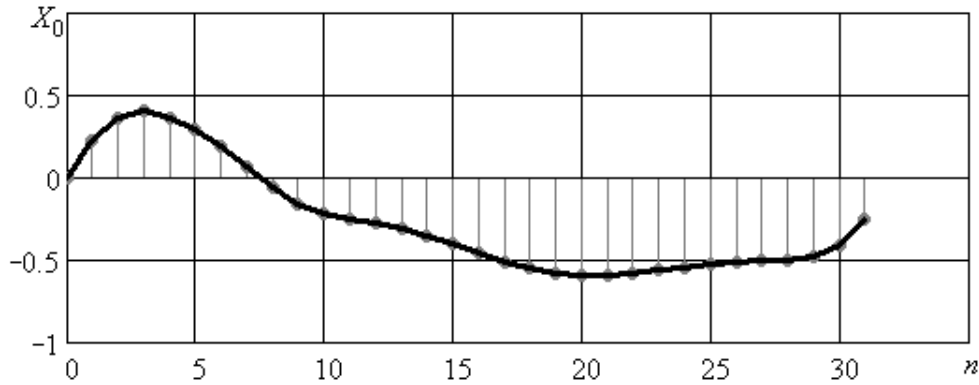
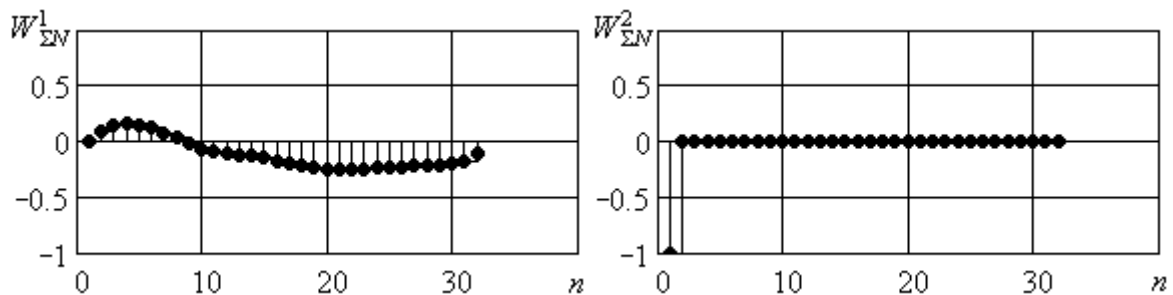
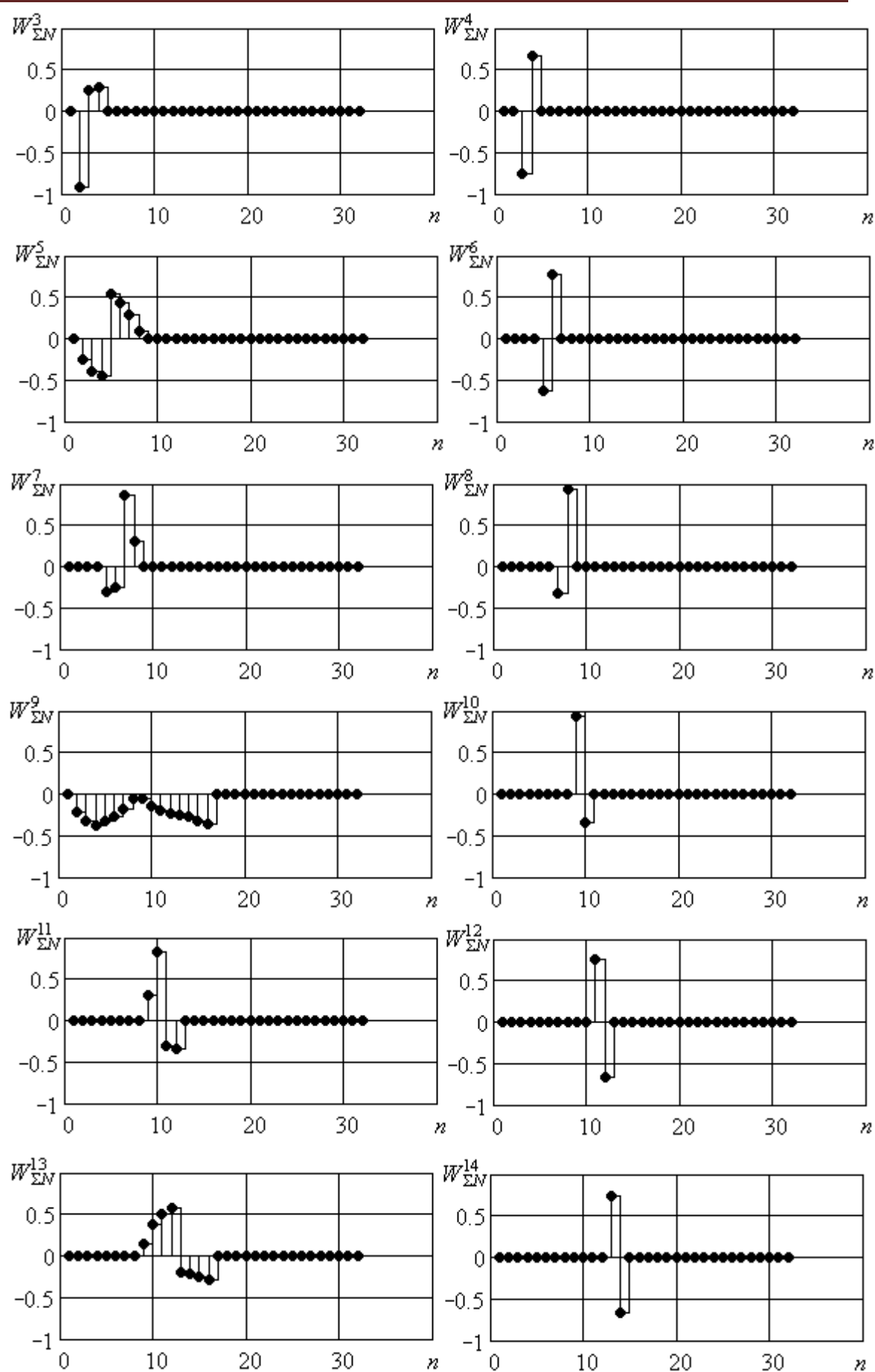
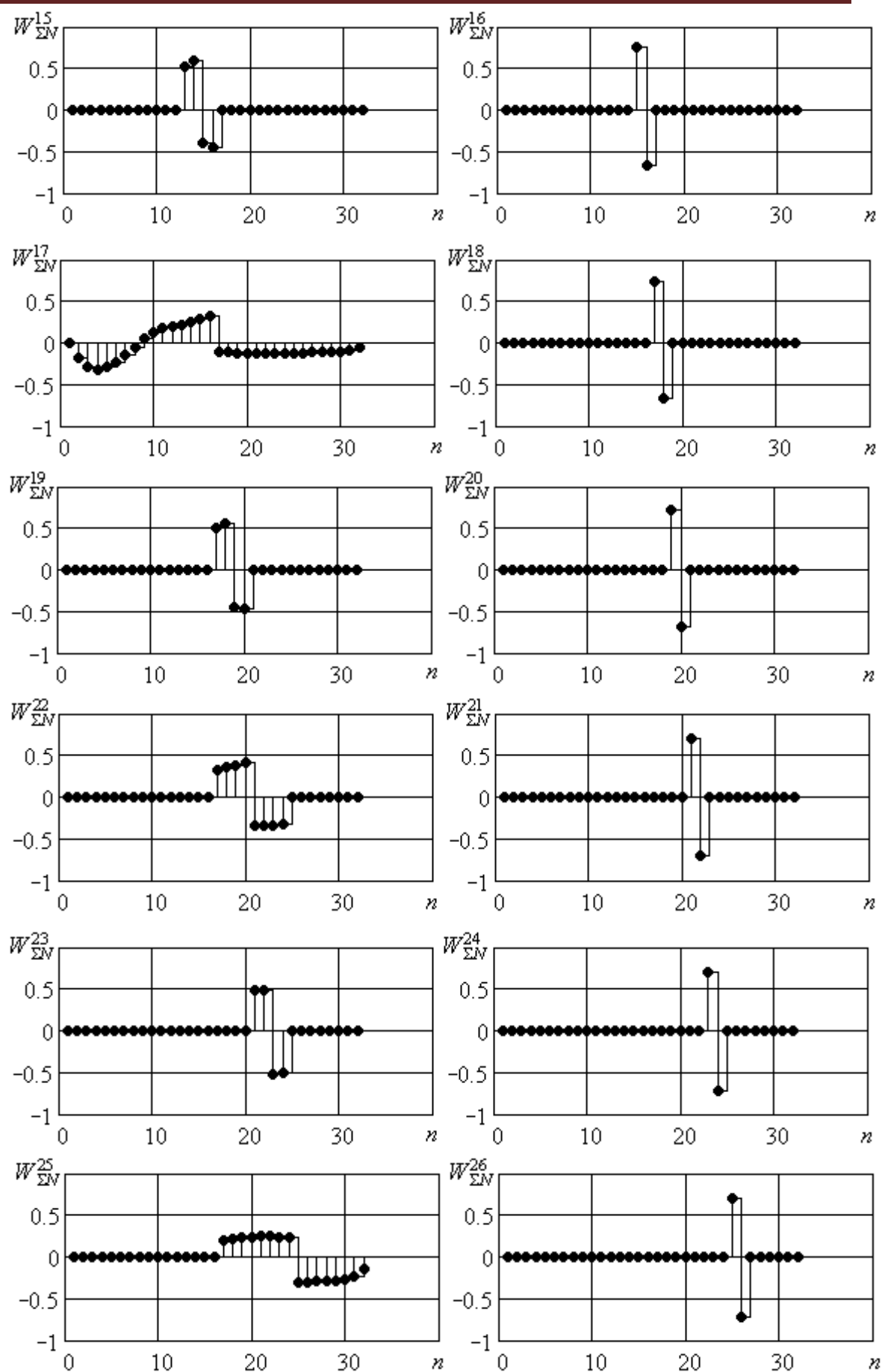


Рис. 2.9.

На рис.2.10 наведено трансформанти отриманого за допомогою описаного вище алгоритму формування матриці нормального перетворення.







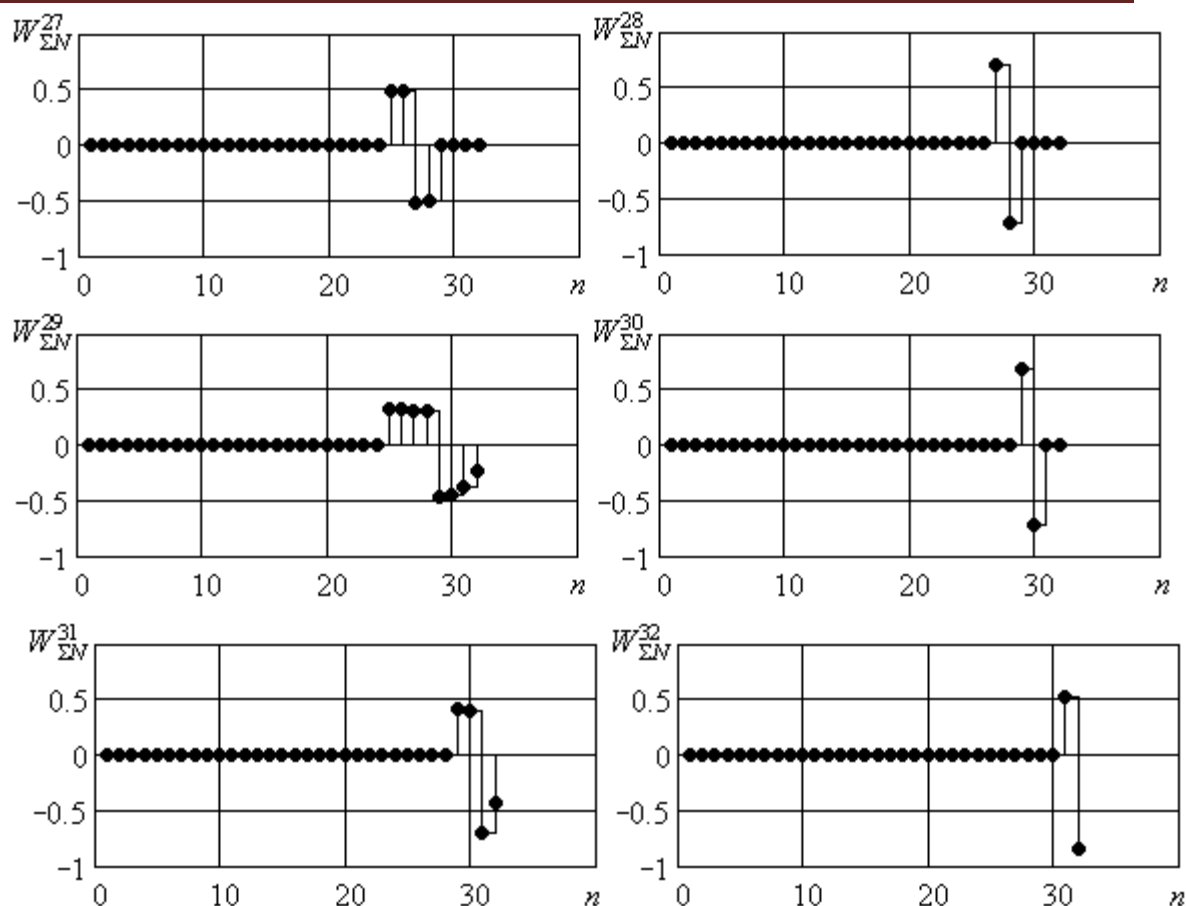


Рис. 2.10.

Як видно з рис. 2.10, перша трансформанта матриці перетворення з точністю до постійного масштабного множника збігається з пульсограмою рис. 2.9, і всі трансформанти перетворення рис. 2.10 ортогональні, про що свідчить спектр перетворення $\overline{W_{\Sigma N}}$ на рис. 2.11.

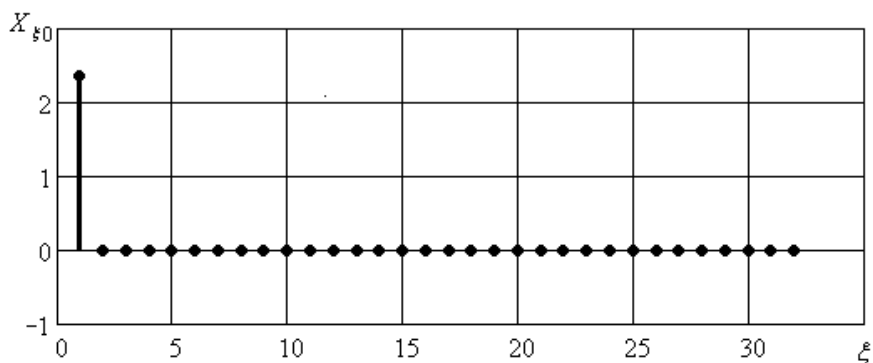


Рис. 2.11.

На рис. 2.12 наведено окремо взятий період пульсової хвилі людини відразу після паління (рис. 2.12а) та період пульсової хвилі людини через 5 хвилин після паління (рис. 2.12б), віднесені до нульового початкового відліку, зведені до одиничної величини розмаху та представлені у форматі $N=32$.

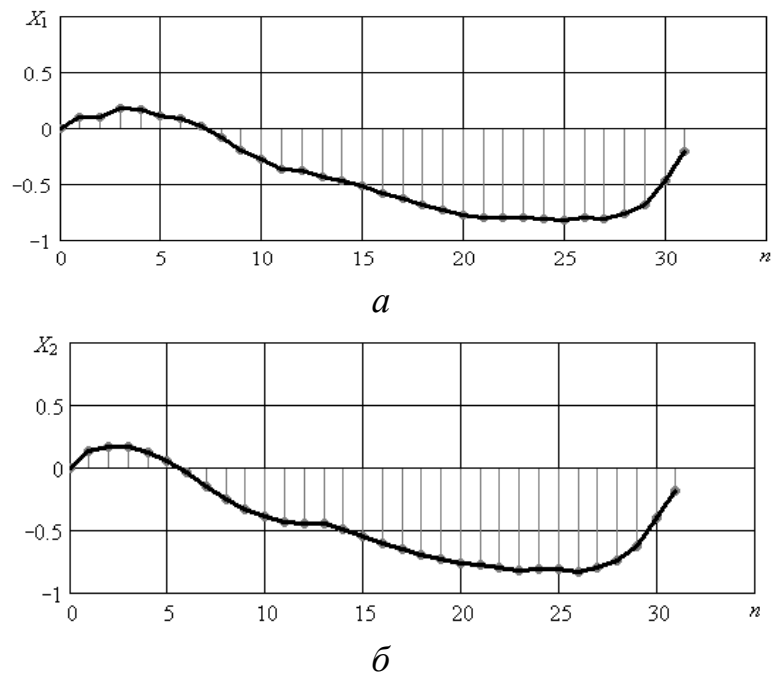


Рис. 2.12.

Їх спектри нормального перетворення наведені на рис. 2.12 *а* та *б* відповідно.

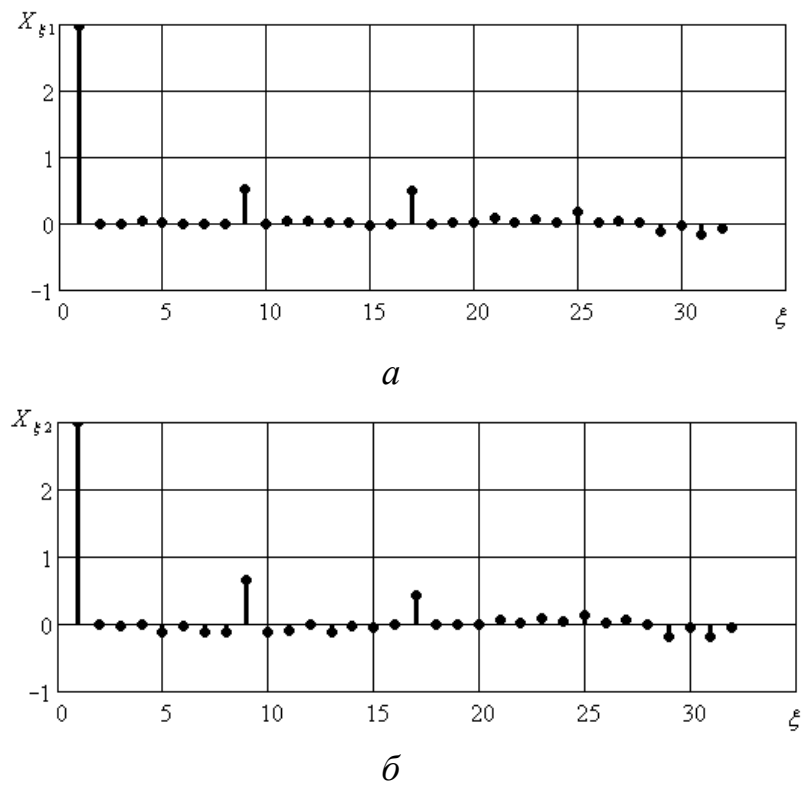


Рис. 2.13.

На рис. 2.13 в спектрах нормального перетворення періодів пульсової хвилі людини відразу та через 5 хвилин після паління, як і очікувалося, можна спостерігати трансформанти вищих порядків, поява яких спричинена зміною стану судинної системи людини в результаті паління.

Приклад 2.2. Цікаво, що, якщо за еталонний сигнал взяти одиницю,

постійну на періоді, то нормальне перетворення такого сигналу збігається з перетворенням Хаара з точністю до знаку.

$$\overline{\overline{W}}_{\Sigma N} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{H}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Можна впевнитись, що ці матриці збігалися б у знаках, якщо при формуванні блочно-діагональної матриці першого часткового нормального розташування знаків було б наступним:

$$\overline{\overline{W}}_1^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{i+1} & x_{i+2} \\ x_{i+2} & -x_{i+1} \end{bmatrix}.$$

2.2.1.2 Матричний оператор дискретного нормального перетворення другого виду

Описану вище процедуру формування нормального дискретного матричного оператора можна використати для одержання перетворення, у якому (у загальному випадку) всі відліки трансформант вищих порядків будуть ненульовими.

При цьому перший крок часткового перетворення $\overline{\overline{W}}_{1N}$ буде таким самим, а для наступних кроків нормалізації для елементів матриці, наприклад, $\overline{\overline{W}}_2$, що відповідають нульовим елементам частково нормалізованого вектора \overline{X}_{1N} , у головній діагоналі запишемо у комірках $(i+1)(i+1)$ і $(i+3)(i+3)$ $\sqrt{x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2}$. Крім того, у комірках $(i+1)(i+3)$ і

$(i+3)(i+1)$ запишемо відповідно $\sqrt{x_{i+3}^2 + x_{i+4}^2}$ і $-\sqrt{x_{i+3}^2 + x_{i+4}^2}$. Як зазначалося в п. 2.2.1.1, це не вплине на результат другого перетворення. У цьому випадку матриця $\overline{\overline{W_2}}$ матиме вигляд:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	a	0	b	0	0	0	0	0
2	0	a	0	b	0	0	0	0
3	$-b$	0	a	0	0	0	0	0
4	0	$-b$	0	a	0	0	0	0
5	0	0	0	0	c	0	d	0
6	0	0	0	0	0	c	0	d
7	0	0	0	0	$-d$	0	c	0
8	0	0	0	0	0	$-d$	0	c

а нормована відповідно:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	a/α	0	b/α	0	0	0	0	0
2	0	a/α	0	b/α	0	0	0	0
3	$-b/\alpha$	0	a/α	0	0	0	0	0
4	0	$-b/\alpha$	0	a/α	0	0	0	0
5	0	0	0	0	c/β	0	d/β	0
6	0	0	0	0	0	c/β	0	d/β
7	0	0	0	0	$-d/\beta$	0	c/β	0
8	0	0	0	0	0	$-d/\beta$	0	c/β

де $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $c = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$, $d = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$,

$\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, $\beta = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$.

Матричний оператор нормального перетворення, отриманий на основі такого часткового оператора $\overline{\overline{W_{2N}}}$ назовемо матричним оператором другого виду.

Як і раніше,

$\overline{\overline{X_{2N}}} = [\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}, 0, 0, 0, \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}, 0, 0, 0]^T$, а матриця $\overline{\overline{W_3}}$, побудована за таким принципом, матиме вигляд

$$\overline{\overline{W}}_3 = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 5 & -\beta & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}$$

Аналогічно до попередніх кроків, після нормування одержимо $\overline{\overline{W}}_{3N}$

$$\overline{\overline{W}}_{3N} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & \alpha/A & 0 & 0 & 0 & \beta/A & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha/A & 0 & 0 & 0 & \beta/A & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \alpha/A & 0 & 0 & 0 & \beta/A & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \alpha/A & 0 & 0 & 0 & \beta/A \\ 5 & -\beta/A & 0 & 0 & 0 & \alpha/A & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -\beta/A & 0 & 0 & 0 & \alpha/A & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & -\beta/A & 0 & 0 & 0 & \alpha/A & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & -\beta/A & 0 & 0 & 0 & \alpha/A \end{array}$$

$$\text{де } \alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}, \quad \beta = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2},$$

$$A = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}.$$

Перемноживши всі матриці часткових перетворень, отримаємо результуючу матрицю нормального перетворення другого виду

$$\overline{\overline{W}}_{\Sigma N} = \begin{array}{c|cccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & x_1/A & x_2/A & x_3/A & x_4/A & x_5/A & x_6/A & x_7/A & x_8/A \\ 2 & -x_2/A & x_1/A & -x_4/A & x_3/A & -x_6/A & x_5/A & -x_8/A & x_7/A \\ 3 & \frac{-x_1 \cdot b}{a \cdot A} & \frac{-x_2 \cdot b}{a \cdot A} & \frac{x_3 \cdot a}{b \cdot A} & \frac{x_4 \cdot a}{b \cdot A} & \frac{-x_5 \cdot d}{c \cdot A} & \frac{-x_6 \cdot d}{c \cdot A} & \frac{x_7 \cdot c}{d \cdot A} & \frac{x_8 \cdot c}{d \cdot A} \\ 4 & \frac{x_2 \cdot b}{a \cdot A} & \frac{-x_1 \cdot b}{a \cdot A} & \frac{-x_4 \cdot a}{b \cdot A} & \frac{x_3 \cdot a}{b \cdot A} & \frac{x_6 \cdot d}{c \cdot A} & \frac{-x_5 \cdot d}{c \cdot A} & \frac{-x_8 \cdot c}{d \cdot A} & \frac{x_7 \cdot c}{d \cdot A} \\ 5 & \frac{-x_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot A} & \frac{-x_2 \cdot \beta}{\alpha \cdot A} & \frac{-x_3 \cdot \beta}{\alpha \cdot A} & \frac{-x_4 \cdot \beta}{\alpha \cdot A} & \frac{x_5 \cdot \alpha}{\beta \cdot A} & \frac{x_6 \cdot \alpha}{\beta \cdot A} & \frac{x_7 \cdot \alpha}{\beta \cdot A} & \frac{x_8 \cdot \alpha}{\beta \cdot A} \end{array}$$

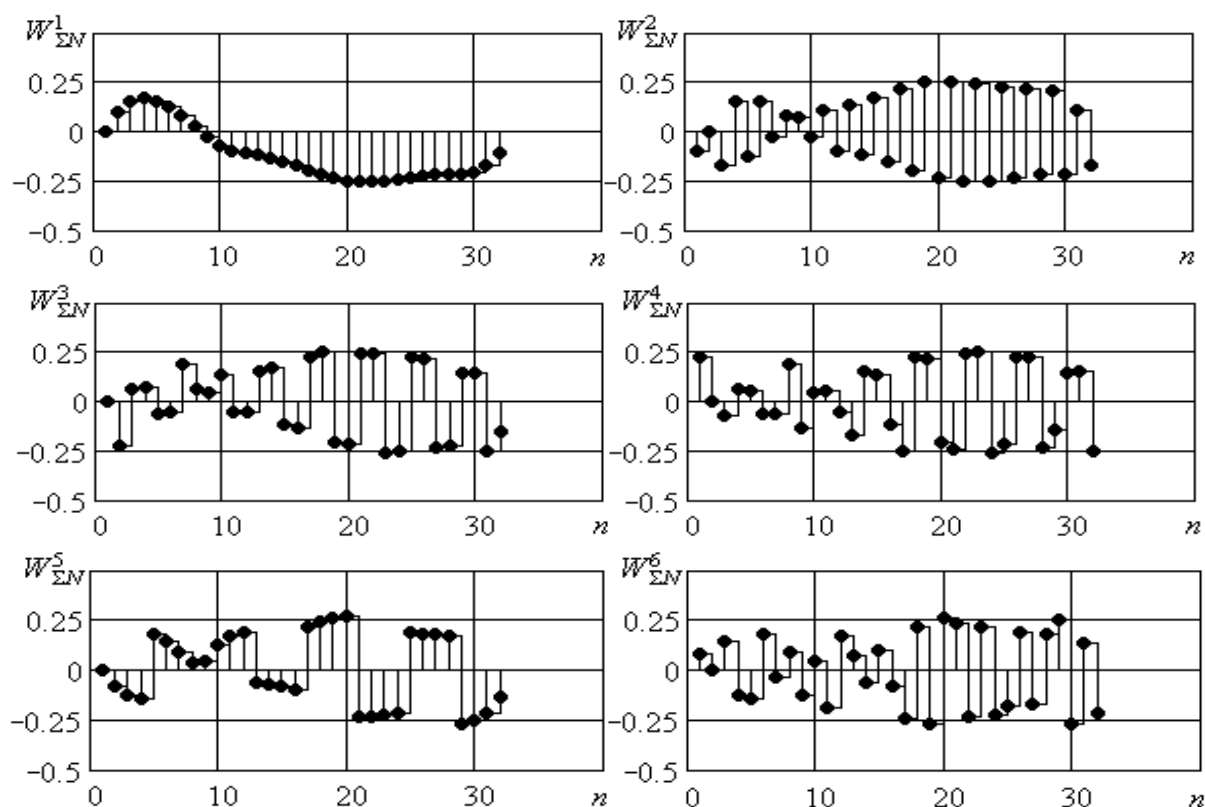
	6	$\frac{x_2 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{-x_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{x_4 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{-x_3 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{-x_6 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$	$\frac{x_5 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$	$\frac{-x_8 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$	$\frac{x_7 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$
	7	$\frac{x_1 \cdot b \cdot \beta}{a \cdot \alpha \cdot A}$	$\frac{x_2 \cdot b \cdot \beta}{a \cdot \alpha \cdot A}$	$\frac{-x_3 \cdot a \cdot \beta}{b \cdot \alpha \cdot A}$	$\frac{-x_4 \cdot a \cdot \beta}{b \cdot \alpha \cdot A}$	$\frac{-x_5 \cdot d \cdot \alpha}{c \cdot \beta \cdot A}$	$\frac{-x_6 \cdot d \cdot \alpha}{c \cdot \beta \cdot A}$	$\frac{x_7 \cdot c \cdot \alpha}{d \cdot \beta \cdot A}$	$\frac{x_8 \cdot c \cdot \alpha}{d \cdot \beta \cdot A}$
	8	$\frac{-x_2 \cdot b \cdot \beta}{a \cdot \alpha \cdot A}$	$\frac{x_1 \cdot b \cdot \beta}{a \cdot \alpha \cdot A}$	$\frac{x_4 \cdot a \cdot \beta}{b \cdot \alpha \cdot A}$	$\frac{-x_3 \cdot a \cdot \beta}{b \cdot \alpha \cdot A}$	$\frac{x_6 \cdot d \cdot \alpha}{c \cdot \beta \cdot A}$	$\frac{-x_5 \cdot d \cdot \alpha}{c \cdot \beta \cdot A}$	$\frac{-x_8 \cdot c \cdot \alpha}{d \cdot \beta \cdot A}$	$\frac{x_7 \cdot c \cdot \alpha}{d \cdot \beta \cdot A}$

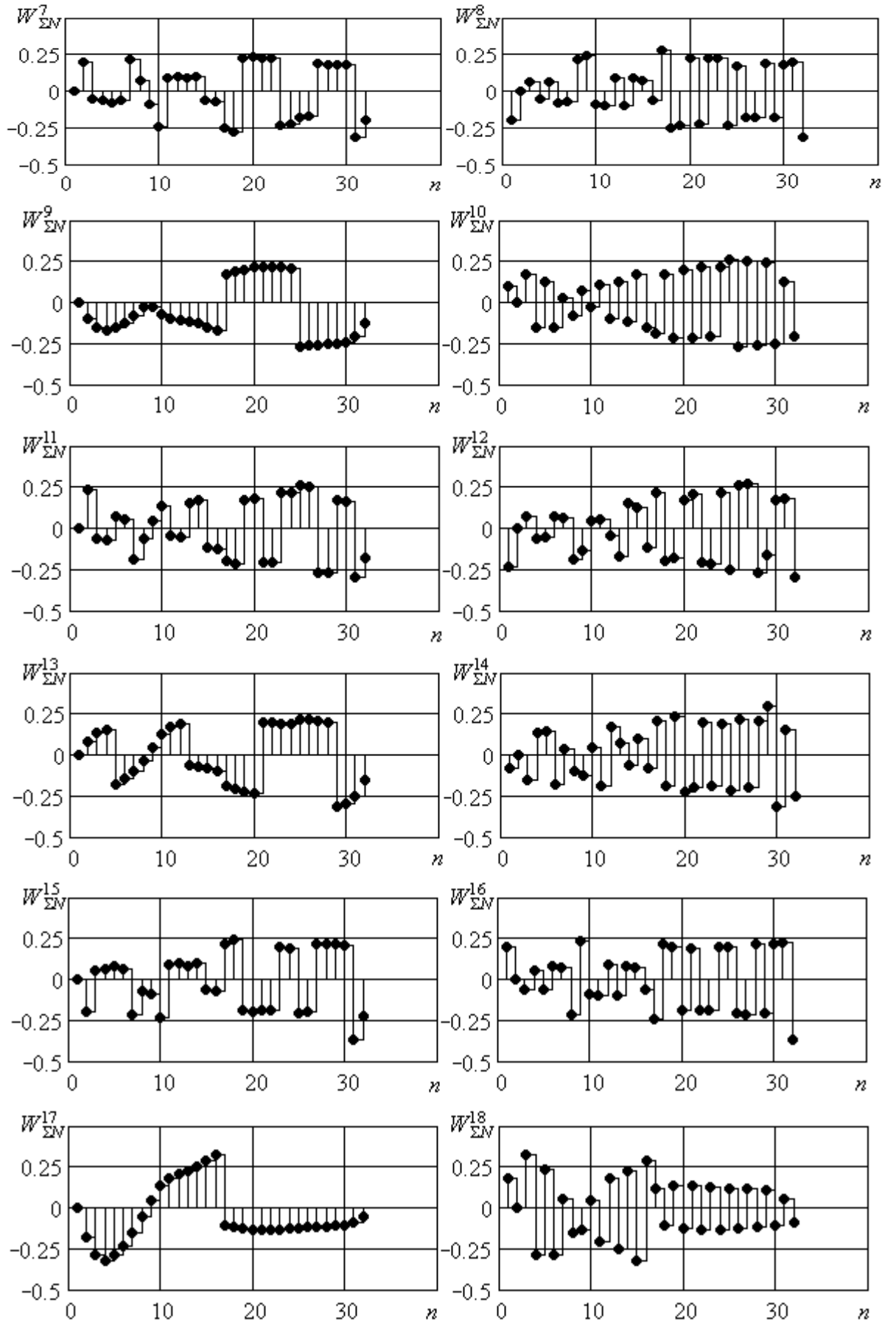
де $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $c = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$, $d = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$,

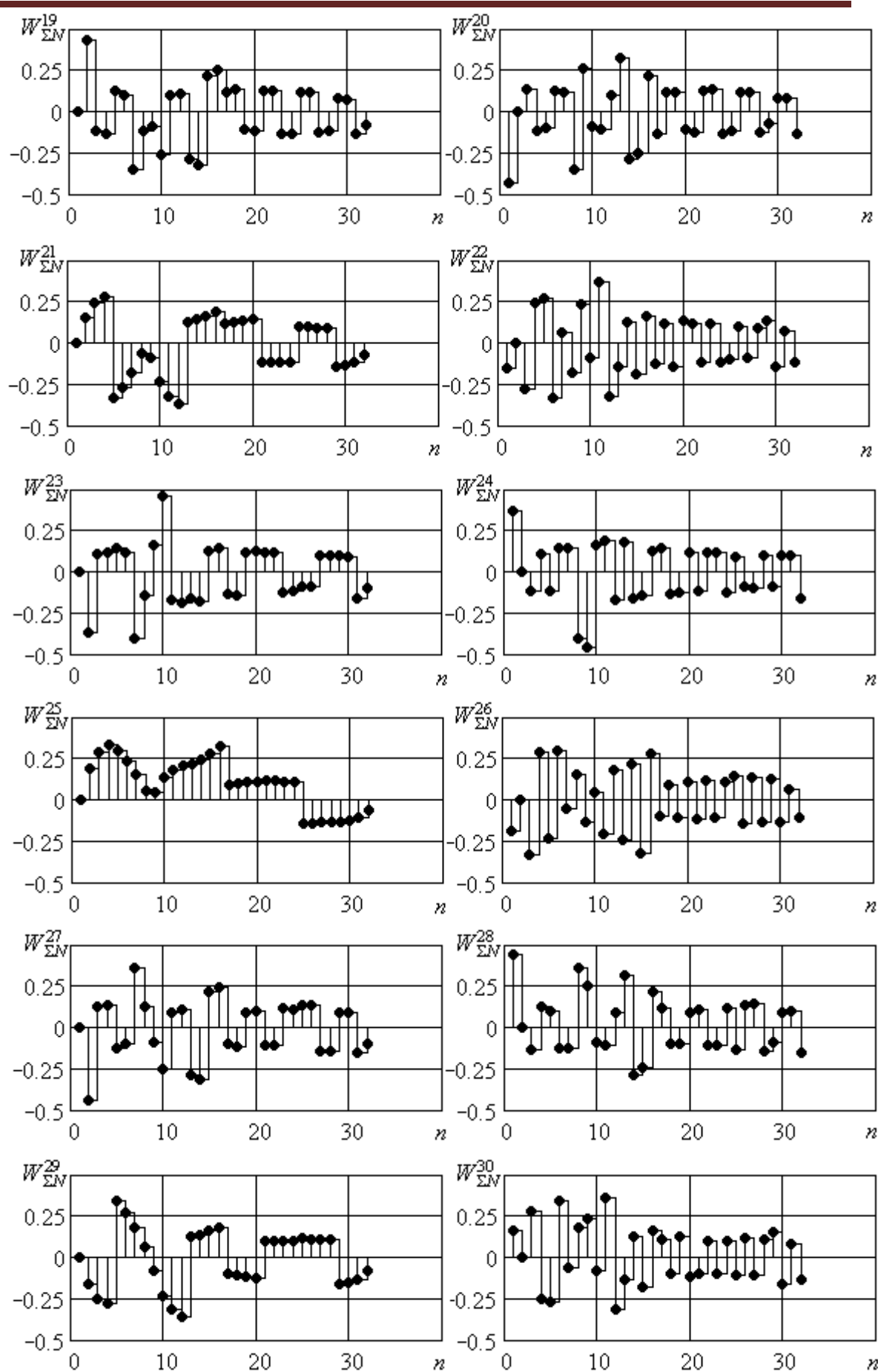
$\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, $\beta = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$.

Значення параметра A визначається, виходячи з умови нормування матриці нормального перетворення, як $\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$.

Приклад 2.3. Трансформанти отриманого на базі еталонного сигналу рис. 2.9 нормального перетворення при операторі 32-го порядку наведені на рис. 2.14.







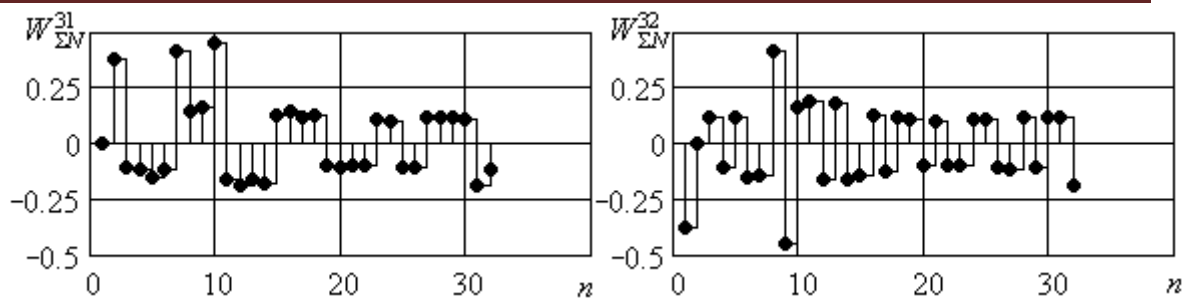


Рис. 2.14.

Спектри сигналу, тотожного першій трансформанті наведений на рис. 2.15.

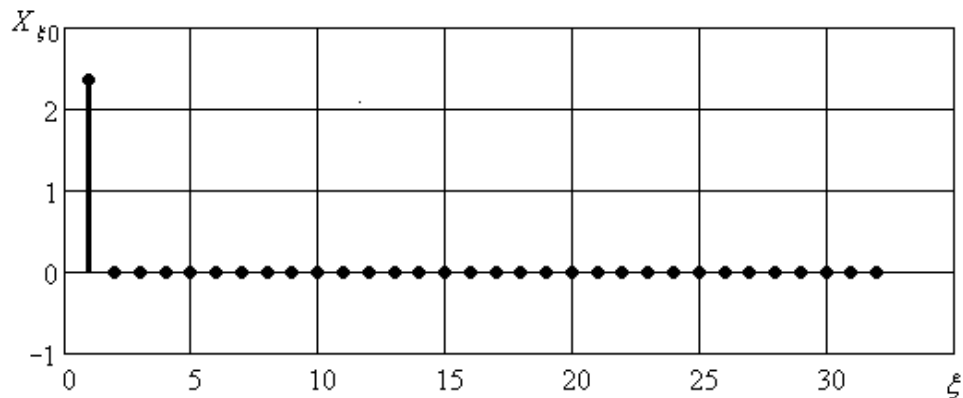
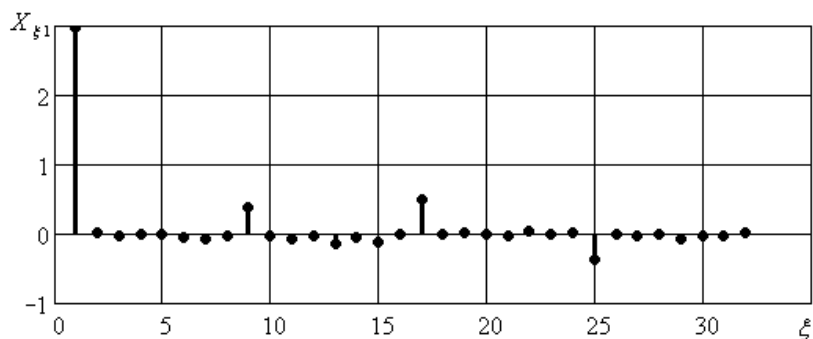
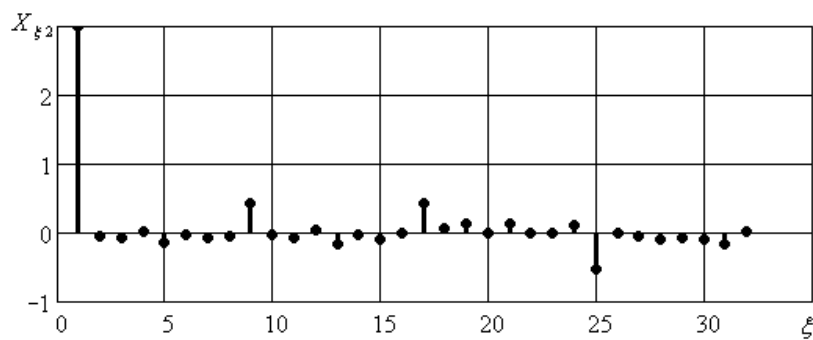


Рис. 2.15.

Спектри сигналів, зображених на рис. 2.12. наведено на рис. 2.16 а та б відповідно.



а



б

Рис. 2.16.

Аналогічно до прикладу, наведеного в 2.2.1.1, спектри рис. 2.16 містять

трансформанти вищих порядків, поява яких спричинена відмінністю форми тестових сигналів від еталонного.

Приклад 2.4. Відзначимо, що, якщо в основу побудови матриці нормального перетворення по вищенаведеному алгоритму покласти одиницю, постійну на періоді, то воно з точністю до знаку збігатиметься з перетворенням Уолша-Адамара.

$$\overline{\overline{W}}_{\Sigma N} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{W} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Аналогічно до розмірковувань у п. 2.2.1.1, ці матриці збігалися б у знаках, якщо при формуванні блочно-діагональної матриці першого часткового нормального перетворення розташування знаків було б наступним:

$$\overline{\overline{W}}_1^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{i+1} & x_{i+2} \\ x_{i+2} & -x_{i+1} \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Алгоритм безпосереднього формування матричного оператора нормального перетворення

На основі аналізу вигляду матриць нормального перетворень різних порядків, можна скласти алгоритм безпосереднього формування цієї матриці, не вдаючись до обчислення матриць нижчих порядків й знаходження їх добутку, тому що для великих значень N цей процес є досить трудомістким. Крім того, отримані в символьному вигляді матриці нормального

перетворення мають елементи зі скороченими загальними множниками та приведеними подібними членами. Отже, чисельне формування матричного оператора призвело би до значного накопичення похибок за рахунок обмеженої розрядності операндів.

Як було показано в розділі 2.2.1, покроковий процес формування матриці нормального перетворення зводиться до створення операторів часткових перетворень, кожне з яких зменшує кількість ненульових складових у спектрі тестового сигналу вдвічі. Слід зазначити, що при форматі N вхідного сигналу ($N = 2^n$, де n – ціле число), кількість кроків формування матриць часткових перетворень дорівнюватиме n , отже при реалізації такого способу отримання матриці нормального перетворення на ПЕОМ буде накопичуватися операційна похибка. До того ж цей процес є досить трудомістким. Саме тому слід розглянути можливість створення алгоритму безпосереднього генерування матриці нормального перетворення, не вдаючись до створення операторів проміжних стадій.

Згідно розділу 2.2.1, при покроковому формуванні матриці нормального перетворення деякого формату N , в основу якого покладено дискретні відліки тестового сигналу $\overline{X_0}$, результуючий оператор перетворення одержано як добуток операторів часткових перетворень. Так, для формату $N = 4$ ми маємо тестовий сигнал у вигляді

$$\overline{X_0} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T,$$

тоді матриця нормального перетворення матиме вигляд добутку $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}} = \overline{\overline{W_{2N}}} \cdot \overline{\overline{W_{1N}}}$, де $\overline{\overline{W_{1N}}}$ та $\overline{\overline{W_{2N}}}$ – оператори покрокових перетворень, що для заданого N мають вигляд

$$\begin{aligned} \overline{\overline{W}}_{1N} &= \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} & \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} & \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \end{bmatrix}, \\ \overline{\overline{W}}_{2N} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Зберігаючи ортогональність рядків матриці $\overline{\overline{W}}_{2N}$ її також можна подати у вигляді

$$\overline{\overline{W}}_{2N} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \\ \frac{-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \end{bmatrix},$$

або

$$\overline{\overline{W}}_{2N} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \\ \frac{-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

При цьому спектр тестового сигналу так само матиме єдину складову в базисі запропонованого перетворення, а відмінність між результуючими операторами перетворень полягатиме у тому, що при використанні виразу (2.10) матриця нормального перетворення матиме у складі своїх

трансформант, як було показано на рис. 2.10, “нулі”, кількість яких буде різнитися від рядка до рядка, тоді як при використанні виразу (2.11) всі комірочки матриці будуть заповнені ненульовими значеннями (рис. 2.14). Для зручності матричний оператор нормального перетворення, що спирається на вираз (2.10) було названо матричним оператором першого виду, а матричний оператор, що спирається на вираз (2.11) – матричним оператором другого виду.

Відтак, для формату $N = 4$ матриця нормального перетворення першого виду матиме вигляд:

$$\overline{\overline{W}}_{4N} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{A} & \frac{x_2}{A} & \frac{x_3}{A} & \frac{x_4}{A} \\ -\frac{x_2}{a} & \frac{x_1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{x_1 \cdot b}{a \cdot A} & -\frac{x_2 \cdot b}{a \cdot A} & \frac{x_3 \cdot a}{b \cdot A} & \frac{x_4 \cdot a}{b \cdot A} \\ 0 & 0 & -\frac{x_4}{b} & \frac{x_3}{b} \end{bmatrix},$$

а матриця нормального перетворення другого виду:

$$\overline{\overline{W}}_{4N} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{A} & \frac{x_2}{A} & \frac{x_3}{A} & \frac{x_4}{A} \\ -\frac{x_2}{A} & \frac{x_1}{A} & -\frac{x_4}{A} & \frac{x_3}{A} \\ -\frac{x_1 \cdot b}{a \cdot A} & -\frac{x_2 \cdot b}{a \cdot A} & \frac{x_3 \cdot a}{b \cdot A} & \frac{x_4 \cdot a}{b \cdot A} \\ \frac{x_2 \cdot b}{a \cdot A} & -\frac{x_1 \cdot b}{a \cdot A} & -\frac{x_4 \cdot a}{b \cdot A} & \frac{x_3 \cdot a}{b \cdot A} \end{bmatrix},$$

де $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $A = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$.

Приступаючи до опису алгоритмів безпосереднього генерування матриць дискретного нормального перетворення першого та другого видів зауважимо, що виходячи з розгляду символічних виразів матричних операторів різних порядків, алгоритм формування матриці нормального перетворення має єдиний вигляд для кожного виду.

Отже, запропонована процедура створення матричного оператора нормального перетворення другого виду передбачає наступні кроки:

1. Генерувати матрицю $\overline{\overline{W}}_N$ Адамара N -го порядку, знаки одиниць якої (+1 чи -1) будуть відповідати знакам елементів, що містяться у відповідних клітинах матриці нормального перетворення.

2. Домножити елементи матриці Адамара на дискретні відліки сигналу $\overline{X}_0 = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, при чому в усіх непарних рядках (відлік рядків та стовпців ведемо з одиниці) порядок розташування елементів x_i вектору \overline{X}_0 залишити незмінним;

тоді як в усіх парних рядках в кожній парі дискретних відліків їх позиції поміняти місцями, тобто $(x_2, x_1, x_4, x_3, \dots, x_N, x_{N-1})$. Після проведення цих операцій одержимо матрицю $\overline{\overline{W}}_x$.

3. Обчислити коефіцієнти $\alpha_1^{(1)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\alpha_2^{(1)} = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, ..., $\alpha_{N/2}^{(1)} = \sqrt{x_{N-1}^2 + x_N^2}$ для всіх пар відліків, починаючи з першої;
 $\alpha_1^{(2)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, $\alpha_2^{(2)} = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$, ..., $\alpha_{N/4}^{(2)} = \sqrt{x_{N-3}^2 + x_{N-2}^2 + x_{N-1}^2 + x_N^2}$ для всіх часткових послідовностей по чотири відліки;

$\alpha_1^{(3)} = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}$, $\alpha_2^{(3)} = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_{i+8}^2}$, ..., $\alpha_{N/8}^{(3)} = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_{N-i+1}^2}$ для всіх часткових послідовностей по вісім відліків з вектору \overline{X} і т.д.;
нарешті

$$\alpha_1^{(n-1)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}, \text{ де } N = 2^n.$$

4. Матрицю $\overline{\overline{W}}_x$, одержану в п.2 алгоритму, помножити на коефіцієнти $\alpha_i^{(k)}$ наступним чином:

- а) всі елементи матриці $\overline{\overline{W}}_x$ множаться на коефіцієнт $1/\alpha_1^{N-1}$;
- б) з кожних чотирьох рядків для двох останніх (3-го та 4-го, 7-го та 8-го, 11-го та 12-го та ін. рядків) всі пари елементів, що утворюють часткові послідовності по чотири елементи множаться на коефіцієнт $\frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}}$ для першої пари першої четвірки та на $\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_2^{(1)}}$ для другої пари першої четвірки, на $\frac{\alpha_4^{(1)}}{\alpha_3^{(1)}}$ для першої пари другої четвірки та на $\frac{\alpha_3^{(1)}}{\alpha_4^{(1)}}$ для другої четвірки і т.д.. Остання четвірка множиться на $\frac{\alpha_{n/2}^{(1)}}{\alpha_{n/2-1}^{(1)}}$ (перша пара) та на $\frac{\alpha_{n/2-1}^{(1)}}{\alpha_{n/2}^{(1)}}$ (друга пара);

в) з кожних восьми рядків чотири останніх (5-й-8-й, 13-й-16-й, 21-й-24-й та ін. рядки) множаться по часовим послідовностям, утвореним з восьми елементів в першій четвірці першої вісімки кожного рядка на $\frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)}}$ та в другій четвірці – на $\frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_2^{(2)}}$. Для першої четвірки другої вісімки – на $\frac{\alpha_4^{(2)}}{\alpha_3^{(2)}}$ та на $\frac{\alpha_3^{(2)}}{\alpha_4^{(2)}}$ для другої четвірки і т.д.;

г) з кожних шістнадцяти рядків вісім останніх (9-й-16-й, 25-й-32-й та ін. рядки) для першої часткової послідовності (кожного рядка) з 16 елементів множаться на $\frac{\alpha_2^{(3)}}{\alpha_1^{(3)}}$ (перші вісім елементів рядка) та на $\frac{\alpha_1^{(3)}}{\alpha_2^{(3)}}$ друга вісімка першої групи з 16 елементів і т.д.;

...

д) останні $N/2$ рядка матриці множаться на $\frac{\alpha_2^{(n-2)}}{\alpha_1^{(n-2)}}$ для перших $N/2$ елементів кожного рядка та на $\frac{\alpha_1^{(n-2)}}{\alpha_2^{(n-2)}}$ – для останніх.

Приклад 2.5. Для ілюстрації роботи алгоритму складемо перевіірочну таблицю (табл. 2.5), включивши у неї довільно вибрані елементи матриці з кожної із зображених на рис. 2.14 трансформант, приведемо їх значення та формулу обчислення згідно з алгоритмом.

Таблиця 2.5

Елемент матриці $\overline{W}_{\Sigma N}$ нормального перетворення	Формула обчислення	Значення
$w_{1,8}$	$\frac{x_8}{\sqrt{\sum_{i=1}^{32} x_i^2}}$	0.028
$w_{2,3}$	$-\frac{x_4}{\sqrt{\sum_{i=1}^{32} x_i^2}}$	-0.171

$w_{3,5}$	$-\frac{x_5 \cdot \sqrt{x_7^2 + x_8^2}}{\sqrt{x_5^2 + x_6^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{32} x_i^2}}$	-0.067
$w_{4,7}$	$-\frac{x_8 \cdot \sqrt{x_5^2 + x_6^2}}{\sqrt{x_7^2 + x_8^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{32} x_i^2}}$	-0.064
$w_{5,3}$	$-\frac{x_3 \cdot \sqrt{\sum_{i=5}^8 x_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{32} x_i^2}}$	-0.13
$w_{8,1}$	$-\frac{x_2 \cdot \sqrt{\sum_{i=3}^4 x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=5}^8 x_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{32} x_i^2}}$	-0.197
$w_{16,16}$	$\frac{x_{15} \cdot \sqrt{\sum_{i=13}^{14} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=9}^{12} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=15}^{16} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=13}^{16} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=9}^{16} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{32} x_i^2}}$	-0.065

Перейдемо до алгоритму створення матриці нормального перетворення першого виду:

1. Обчислити кількість та визначити місце розташування ненульових елементів матриці наступним чином. Кількість ненульових елементів кожного рядка буде залежати від номеру рядку за наступним правилом: якщо число $(i-1)$, де i – номер відповідного рядку, без остачі ділиться на число $k/2$, де $k = 2^n$, $n = 1, 2, \dots, \log_2 N$, то цей рядок міститиме k ненульових елементів. Так, для $N = 8$ 2-й, 4-й, 6-й і 8-й рядки матриці містять два, 3-й і 7-й рядки – чотири, а 1-й і 5-й – вісім елементів.

Розташування елементів у рядку також відбувається за певним законом. Група з k елементів, що міститься у даному рядку зсувається на k позицій відносно першого елементу попередньої групи з такою ж кількістю елементів. Наприклад для $k=2$ у другому рядку елементи займають 1-шу та 2-гу позиції, у четвертому рядку – 3-тю та 4-ту, у шостому рядку – 5-ту та 6-ту, а у восьмому – 7-му та 8-му позиції.

2. Згенерувати матрицю Хаара N -го порядку, знаки елементів якої будуть відповідати знакам множників (+1 або -1) перед вмістом відповідних клітин матриці нормального перетворення.

3. Помножити отриману матрицю з елементів 0, +1 та -1 на дискретні відліки сигналу $\overline{X_0}$, при чому в усіх непарних рядках (відлік рядків та стовпців починається з одиниці) порядок розташування елементів x_i вектору $\overline{X_0}$ залишити незмінним;

а в парних рядках в кожній парі дискретних відліків їх позиції поміняти місцями, тобто $(x_2\ x_1, x_4\ x_3, \dots, x_N, x_{N-1})$. Внаслідок цих операцій одержимо матрицю $\overline{\overline{W_x}}$.

4. Обчислити коефіцієнти ідентичні коефіцієнтам, що приведені у п.4 алгоритму створення матричного оператора нормального перетворення другого виду.

5. Матрицю $\overline{\overline{W_x}}$, одержану в п.2 алгоритму, помножити на коефіцієнти $\alpha_i^{(k)}$ за наступним правилом:

а) всі елементи 1-го рядку матриці $\overline{\overline{W_x}}$ множаться на коефіцієнт $1/\alpha_1^{(n-1)}$;
б) елементи всіх рядків з кількістю елементів $k=2$ множаться на коефіцієнт $1/\alpha_1^{(1)}$ для 2-го рядку, на $1/\alpha_2^{(1)}$ для 4-го рядку, на $1/\alpha_3^{(1)}$ для 6-го рядку і т.д.;

в) рядки, що містять $k=4$ елементи множаться на коефіцієнти відповідно $1/\alpha_1^{(2)}$ для 3-го рядку, на $1/\alpha_2^{(2)}$ для 7-го рядку, на $1/\alpha_3^{(2)}$ для 11-го рядку і т.д.;

При чому перші два елементи з групи у 3-му рядку потрібно домножити на коефіцієнт $\frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}}$, а інші два – на коефіцієнт $\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_2^{(1)}}$; перші два елементи у 7-му рядку – на $\frac{\alpha_4^{(1)}}{\alpha_3^{(1)}}$, а інші два – на $\frac{\alpha_3^{(1)}}{\alpha_4^{(1)}}$ і т.д.;

г) для рядків, що містять $k=8$ елементів характерним є множник $1/\alpha_1^{(3)}$ для 5-го рядку, на $1/\alpha_2^{(3)}$ для 9-го рядку, на $1/\alpha_3^{(3)}$ для 13-го і т.д.

До того ж перші чотири елементи з 5-го рядка потрібно домножити на коефіцієнт $\frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)}}$, а інші чотири – на коефіцієнт $\frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_2^{(2)}}$, перші чотири елементи з 7-го рядку - на $\frac{\alpha_4^{(2)}}{\alpha_3^{(2)}}$, а інші чотири - на $\frac{\alpha_3^{(2)}}{\alpha_4^{(2)}}$ і т.д.; ...

нарешті, рядки, що містять $k = N$ елементів множаться на коефіцієнт $1/\alpha_1^{(n-1)}$. Додатково перша їх половина містить у своєму складі множник $\frac{\alpha_2^{(n-2)}}{\alpha_1^{(n-2)}}$, а друга – множник $\frac{\alpha_1^{(n-2)}}{\alpha_2^{(n-2)}}$.

Приклад 2.6. Для ілюстрації роботи алгоритму представимо перевіірочну таблицю (табл. 2.6), включивши у неї довільно вибрані елементи матриці з кожної із зображених на рис. 2.11 трансформант

Таблиця 2.6

Елемент матриці $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}$ нормального перетворення	Формула обчислення	Значення
$w_{1,5}$	$\frac{x_5}{\sqrt{\sum_{i=1}^{32} x_i^2}}$	0.153
$w_{2,1}$	$-\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	-1
$w_{3,3}$	$\frac{x_5 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}}$	0.258
$w_{4,3}$	$-\frac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}$	-0.748
$w_{5,8}$	$\frac{x_8 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=5}^8 x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}}$	0.099

$w_{9,13}$	$\frac{x_{13} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=9}^{16} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{16} x_i^2}}$	-0.248
$w_{17,31}$	$\frac{x_{32} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{16} x_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=16}^{32} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{32} x_i^2}}$	-0.092

РОЗДІЛ 3. ВІКОННА ОБРОБКА СИГНАЛІВ. ЛОКАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

3.1. Віконна обробка сигналів

3.1.1. Стаціонарні та нестаціонарні сигнали

Згадане в попередніх розділах неперервне перетворення Фур'є призначене до аналізу одного сигналу, розташованого на осі часу $t \in (-\infty, +\infty)$, що зумовлює стаціонарність цього сигналу. Так само усі дискретні (завжди за уявою періодичні) перетворення (як і неперервні перетворення періодичних сигналів) розглядають сигнали, стаціонарні в тому сенсі, що на осі часу (або іншої натуральної координати) вони періодично незмінні в усьому інтервалі $t \in (-\infty, +\infty)$. В той самий час суттєву (релевантну) інформацію про стан будь-якої технічної чи біологічної системи оцінюють за відмінами її реакцій від еталонних (які відповідають нормальному функціонуванню системи). Тому з часом форма сигналів може змінюватися і, таким чином, досліджувані сигнали носять не періодичний (при періодичній зовнішній дії), а репетиційний характер. Саме пошук відмін між еталоном і досліджуваною реакцією є основою медичної та технічної діагностики. Часто використання ортогональних перетворень (які теж будемо називати стаціонарними) для сигналів, що мають суттєві відміни (внаслідок інтегрального характеру самого перетворення) не дозволяє помітити такі відміни в області спектрів

Для ілюстрації цього розглянемо приклад прямокутного імпульсу амплітуди A і довжини τ (рис 3.1,а) та той самий імпульс з δ -імпульсом на початку (рис.3.1,б).

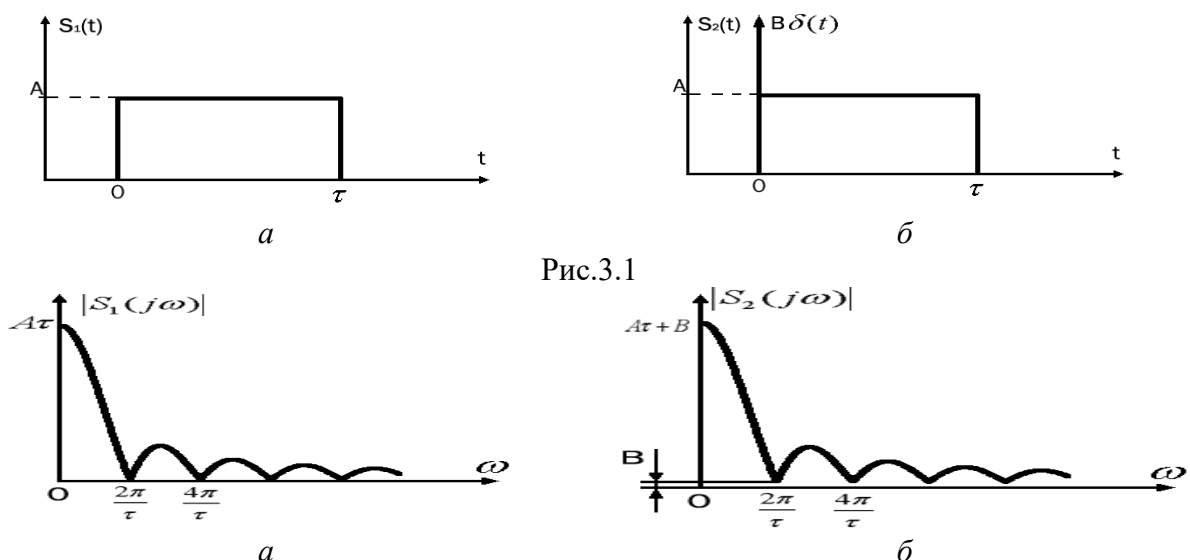


Рис.3.2

Модулі спектрів ($S_1(j\omega)$, $S_2(j\omega)$) цих двох сигналів (для випадку $A \times \tau \gg B$) зображено на рис.3.2, а та б відповідно.

Зв'язок між спектрами сигналів можна описати виразом

$$S_1(j\omega) = S_2(j\omega) + B,$$

де B – спектр δ -імпульса з вагою B .

При визначенні експериментально або при обчисленні на ЕОМ спектрів цих двох сигналів, різниці між ними можна й не помітити (на частотах $\frac{2\pi}{\tau} \times k$ спектр $|S_2(j\omega)|$ буде мати не нульові значення, як для $|S_1(j\omega)|$, а деякі «малі» ($B > 0$), що можуть лежати в межах дозволеної похибки.

Дещо зміниться характер кривих $|S_2(j\omega)|$ порівняно до $|S_1(j\omega)|$ в інтервалах пелюсток між $\frac{2\pi}{\tau} \times k$ та $\frac{2\pi}{\tau} \times (k+1)$, що при «малих» B теж буде непомітним. Це є наслідком того, що «гострий і високий» δ -імпульс невеликої площі B при перетворенні Фур'є «розмивається» по всій осі частот.

Зауважимо тепер, що будь-який стаціонарний сигнал отримують вирізанням з пачки (репетиційних сигналів або сигналів взагалі різної форми), після чого його й розміщують на нескінченній осі часу.

Тому, якщо з послідовності сигналів або з вже даного сигналу $s_2(t)$ (рис.3.2б) вирізати δ -імпульс з частиною прямокутника довжиною $\tau_1 \ll \tau$, такою що $A \times \tau < B$, то відсутність чи наявність - імпульсу (рис.3.3, а, б відповідно) була б дуже помітною.

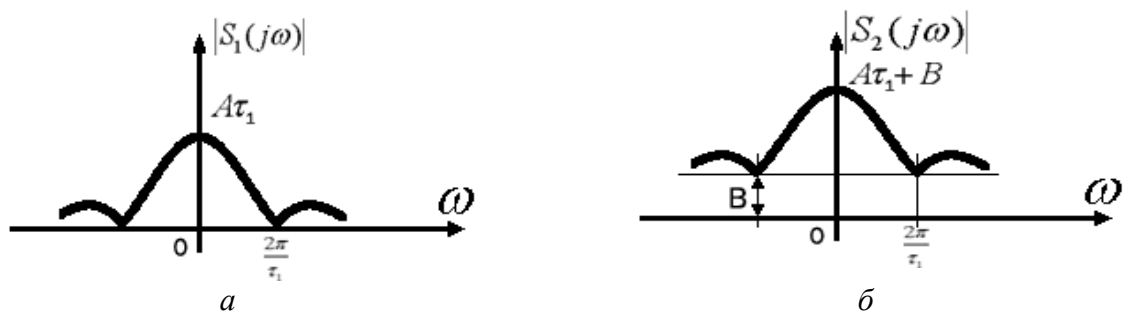


Рис.3.3

З іншого боку, якщо суттєва інформація зосереджена не в δ -імпульсі, а в прямокутному імпульсі довжиною τ , тоді останнє обмеження вікном τ_1 цього імпульсу сильно спотворює спектр.

Таким чином вибір ширини вікна грає вирішальну роль в ідентифікації того чи іншого графоелемента (рис.3.3, а, б).

Якщо довжина (у часі) шуканого графоелемента відома, ширину часового вікна слід вибирати так, щоб цей графоелемент без спотворень можна було б "вирізати".

3.1.2. Віконна обробка сигналів

Розглянуті приклади певною мірою пояснюють необхідність віконної обробки досліджуваних сигналів.

Оскільки координата часу, на якій знаходиться шуканий графоелемент (наприклад, роздвоєння R -хвилі ЕКГ людини, або випадіння QRS-комплексу, наявність чи відсутність δ -імпульсів на вході вторинного джерела електроживлення та інше), невідома, то аналіз наявності графоелементів можливо виконувати у вікні, яке пересувається вздовж осі часу.

Найпростішим в натуральних координатах є прямокутне вікно. Але воно обмежує довжину сигналу у часі, тому спектр Фур'є такого сигналу стає нескінченним вздовж осі частот. З іншого боку, нескінченний частотний спектр слід обмежувати, зробивши тим самим його фінітним. Але такому спектру відповідає нескінченний сигнал. До того ж спектр прямокутного імпульса має «хвилястий» характер (рис.3.2).

Як відомо, добутку оригіналів відповідає згортка спектрів і навпаки. Тому хвилястий характер буде мати як спектр досліджуваного сигналу, так і сам сигнал (при обмеженні спектру прямокутником). Це явище відоме як ефект Гіббса.

Для усунення ефекту Гіббса використовують вікна (часові та частотні), форма яких подібна до Гауссового закону, оскільки Гауссів дзвоник при перетворенні Фур'є дає спектр із Гауссовим законом зміни амплітуди.

Оскільки Гауссова крива нескінченна на осі аргументу, то використовують різні її апроксимації. Серед найбільш поширених – вікна Барлета, Хеннінга та Хеммінга.

Вікно Барлета

$$w(i) = \frac{2i}{N-1}, 0 \leq i \leq \frac{N-1}{2}, \quad (3.1a)$$
$$w(i) = 2 - \frac{2i}{N-1}, (N-1)/2 \leq i \leq N-1;$$

вікно Хеннінга

$$w(i) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right) \right), 0 \leq i \leq N-1 \quad (3.1b)$$

вікно Хеммінга

$$w(i) = 0,54 - 0,46 \times \cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right). \quad (3.1c)$$

3.2. Локальне перетворення Фур'є. Аналіз із сталою роздільною здатністю

Віконне перетворення Фур'є першим запропонував Габор, який ввів локальне перетворення Фур'є (*short time Fourier*). Він розглядав сигнал у вікні $w(t)$, вважав його стаціонарним у цьому вікні.

Для видимої крізь вікно $w(t)$ частини сигналу $x(t) \times w(t/\tau)$, тобто **пряме локальне перетворення Фур'є** має вигляд

$$X_{wF}(\tau, j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \times w(t - \tau) \times e^{-j\omega t} dt \quad (3.2a)$$

Тачим чином за формулою можна отримати спектрограму (для різних положень центру вікна τ), тобто двовимірну площину аргументів (τ, ω) .

Зворотне локальне перетворення Фур'є можна отримати за формулою

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_{wF}(\tau, j\omega) \times w(t - \tau) \times e^{j\omega t} d\tau d\omega, \quad (3.2б)$$

Параметр ω локального перетворення Фур'є (ЛПФ) співпадає з неперервною частотою класичного перетворення Фур'є. Крім того, ЛПФ має багато властивостей, аналогічних до класичного перетворення Фур'є.

Так, наприклад, вірна **теорема про запізнення**:

якщо $x(t) \leftrightarrow X_{wF}(\tau, j\omega)$, то

$$x(t \pm t_0) \leftrightarrow X_{wF}(\tau \mp t_0, j\omega) \times e^{\mp j\omega t_0}. \quad (3.3)$$

Теорема про частотний зсув має вигляд:

якщо $X_{wF}(\tau, j\omega) \leftrightarrow x(t)$, то

$$X_{wF}(\tau, j(\omega \mp \omega_0)) \leftrightarrow x(t) \times e^{\pm j\omega_0 t} \quad (3.4)$$

З останньої теореми витікає **теорема про множення на косинусоїду** (амплітудну модуляцію)

якщо $x(t) \leftrightarrow X_{wF}(\tau, j\omega)$, то

$$x(t) \times \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \times [X_{wF}(\tau, j(\omega \mp \omega_0)) + X_{wF}(\tau, j(\omega + \omega_0))] \quad (3.5)$$

Окрім того, оскільки локальне перетворення залишається лінійним, то вірна і **теорема про лінійність**:

якщо $x_1(t) \leftrightarrow X_{1wF}(\tau, j\omega)$; $x_2(t) \leftrightarrow X_{2wF}(\tau, j\omega)$, то

$$a \times x_1(t) + b \times x_2(t) \leftrightarrow a \times X_{1wF}(\tau, j\omega) + b \times X_{2wF}(\tau, j\omega), \quad (3.6)$$

Слід також додати, що за всіх аналогій до наведених властивостей класичного перетворення Фур'є на властивості ЛПФ вирішальний вплив має віконна функція $w(t)$.

Оскільки форма вікна може бути фінітним (обмеженим у часі) наближенням до Гауссової кривої, інтеграл (3.2a), а тим більше (3.2б)

обчислювати в аналітичному вигляді (навіть при простих сигналах $x(t)$) стає вкрай незручно.

Так, обираючи еквідистантний крок дискретизації Δt , замінимо $t \rightarrow n\Delta t$; $dt \rightarrow \Delta t$; $\tau \rightarrow m\Delta t$; $\omega \rightarrow k\omega_1 = \frac{2\pi}{N\Delta t}k$ (при цьому ДЛПФ стає перетворенням періодичного сигналу $x(n\Delta t)$ так само, як і ДПФ); інтервал в (3.2а) замінюємо на суму; нормуємо крок $\Delta t=1$ і отримуємо. Отже, **дискретне локальне перетворення Фур'є** має вигляд

$$X_{DFW}(m,k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \times w(n-m) \times e^{-j2\pi nk/N}. \quad (3.7a)$$

Тут формати дискретного сигналу $x(n)$ і частотної складової спектрограми однакові і дорівнюють N .

Для зворотного перетворення отримаємо

$$x(n) = A_0 \times \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_{DFW}(m,k) \times w(n-m) \times e^{-j2\pi mk/N}, \quad (3.7b)$$

де A_0 – константа нормування.

При дискретному ЛПФ, як видно з вищенаведених міркувань, кроки дискретизації за частотою та за часом еквідистантні, тобто роздільна здатність математичного методу за часом і за частотою однакова як для високих, так і для низьких частот. Часове вікно постійне, тому кроки дискретизації для вікна, сигналу і всіх графоеlementів сигналу у вікні теж однакові. Це суперечить практичним потребам техніки, оскільки короткі сигнали мають спектр значно ширший, ніж більш довгі сигнали тієї самої форми. Останнє є наслідком відомої **теореми про зміну масштабу**:

Якщо $x(t) \leftrightarrow X_{wF}(j\omega)$, то

$$x(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} X_{wF}(j\omega/\alpha) \quad (3.8)$$

Для даного вікна $w(t)$ та його перетворення Фур'є $W(j\omega)$ визначимо ширину смуги прозорості фільтра за формулою

$$\Delta\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \times |W(\omega)|^2 d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 d\omega, \quad (3.9a)$$

де знаменник (за теоремою Парсеваля) пропорційний енергії $w(t)$. Дві гармоніки можна розрізнити (за частотою) тільки в одному випадку, якщо їх частоти відрізняються більш ніж на $\Delta\omega$.

Часову роздільну здатність Δt можна оцінити аналогічно

$$\Delta t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \times |w(t)|^2 dt / \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt, \quad (3.9b)$$

де знаменник дорівнює енергії $w(t)$. Два імпульси на часовій осі можна розрізнити, якщо інтервал між ними перевищує Δt .

Таким чином, за часом і частотою (3.8) роздільну здатність не можна одночасно необмежено збільшувати (тобто зменшувати інтервал Δt і смугу $\Delta\omega$), оскільки Δt і $\Delta\omega$ взаємозалежні

$$\Delta t \times \Delta\omega \geq \pi, \quad (3.10)$$

Нерівність (3.10), яка має фундаментальне значення, називають нерівністю Гейзенберга (вона визначає принцип невизначеності в фізиці, радіолокації).

Мінімальне значення $\Delta t \times \Delta \omega = \pi$ на часово-частотній площині утворює область невизначеності $\Delta t_{min} \times \Delta \omega_{min}$. Усередині цієї області точніше часову і частотну координату виміряти принципово неможливо. Якщо як вікно $w(t)$ використовувати Гауссову криву, то нерівність (3.10) стає рівністю. При цьому частотне вікно (перетворення Фур'є від Гауссового вікна $w(t)$) має форму Гауссової кривої).

Таким чином, для графоелементів різної довжини (в натуральних координатах) ширину вікна потрібно підлаштовувати, що видно з прикладів рис.3.1. Для цього, здавалося б, треба робити серію локальних перетворень Фур'є для вікон з різними смугами прозорості, щоб виділити на спектрограмі графоелементи різної довжини. Але цього не слід робити, виходячи з деяких фундаментальних властивостей, які будуть розглянуті нижче і які є основою для створення вейвлет-перетворень.

3.3. Вейвлет перетворення. Аналіз із змінною роздільною здатністю

3.3.1. Неперервне вейвлет перетворення

Для подолання обмеження та незручності, пов'язаних з локальним перетворенням Фур'є (стосовно роздільної здатності за часом і частотою) для пошуку графоелементів нестационарних сигналів розроблено Вейвлет перетворення (wavelet transform). В перекладі з англійської мови wavelet означає «хвилька». При застосуванні вейвлет-перетворення **роздільні здатності Δt і $\Delta \omega$ змінюються, але так, що їх добуток відповідає нерівності Гейзенберга (3.10), тобто**

$$\Delta t_{var} \times \Delta \omega_{var} \geq \pi \quad (3.11)$$

де Δt_{var} , $\Delta \omega_{var}$ означає змінні величини (в залежності від змінної ширини вікна і відповідної до неї змінної смуги частот).

При цьому зі збільшенням роздільної здатності в області частот роздільна здатність за часом зменшується і навпаки.

Так, для НЧ гармонік, що знаходяться на відстані Ω одна від одної (рис.3.5а) їх часовий оригінал можна записати у вигляді

$$x(t) = A_0 \times \cos((\omega_1 + \Omega) \times t) + A_0 \times \cos((\omega_1 - \Omega) \times t) = \\ A_0 \times \cos((\omega_0 + \Omega/2) \times t) + A_0 \times \cos((\omega_0 - \Omega/2) \times t),$$

де $\omega_0 = \omega_1 + \Omega/2$, звідки $x(t) = 2A_0 \times \cos((\Omega/2) \times t) \times \cos(\omega_0 \times t)$.

Якщо тепер $\omega_0 \gg \Omega$, то графік $x(t)$ зображено на рис.3.5,б

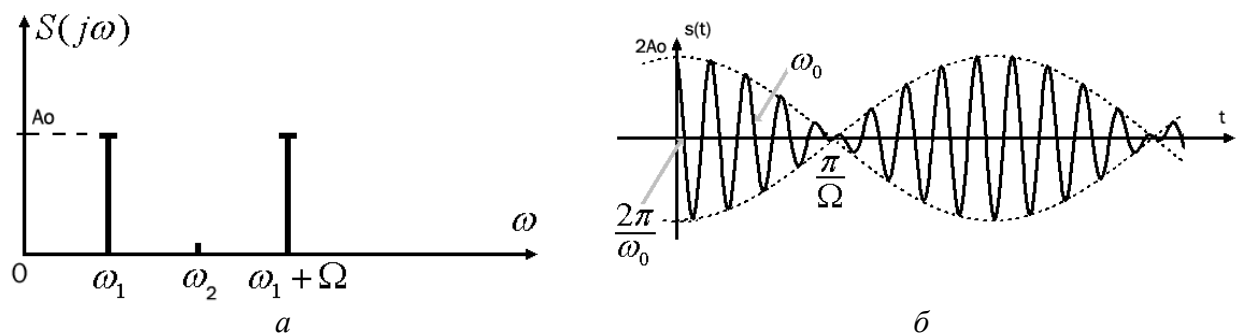


Рис.3.5

Тобто «биття» (рис.3.5,б) стають помітними лише для великої кількості періодів середньої частоти ω_0 . Це означає, що ширина вікна Δt повинна бути більшою ніж π/Ω , а ширина частотного вікна – меншою, ніж Ω . Нехай $\omega_1 = 10^3$; $\Omega = 100$, тоді $\Delta t > \frac{\pi}{\Omega} = \pi \times 10^{-2}$ с, а $\Delta\omega < 100$.

Якщо ж взяти два прямокутні імпульси довжиною $\tau = 10^{-4}$ с та відстані між ними $T = 10^{-3}$ с (рис.3.6,а), то їх спектр має вигляд рис.3.6,б.

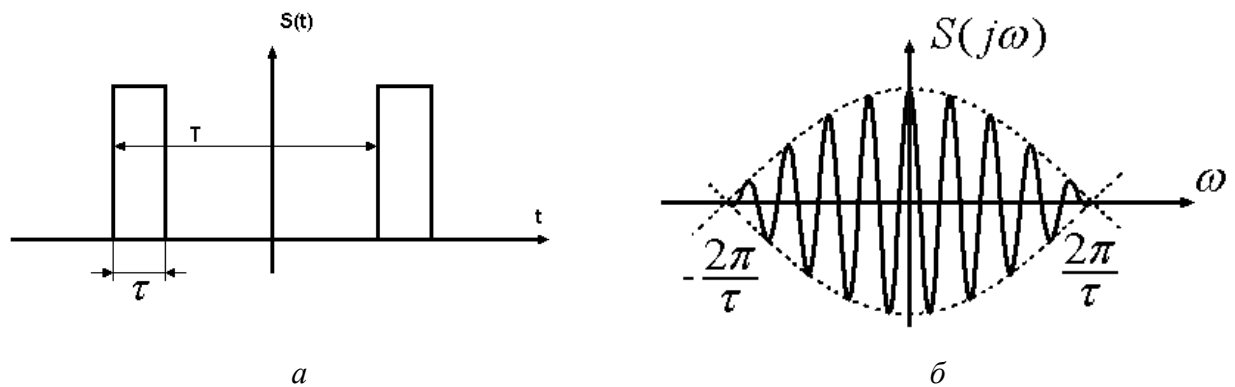


Рис.3.6

Для розрізнення двох сигналів рис. 3.6,а смуга прозорості часового вікна повинна бути $\Delta t < T/2 = 5 \times 10^{-4}$ с, а за частотою $\Delta\omega > 2\pi/\tau = 2\pi \times 10^4$ рад/с.

Таким чином, наведений приклад демонструє необхідність зміни роздільної здатності при аналізі різних сигналів (рис. 3.5,б та рис. 3.6,а).

Нагадаємо також, що одним із головних параметрів якості коливального контура (або смугового фільтра) є його добротність, яку визначають в радіотехнічній практиці як відношення центральної частоти до смуги прозорості $\Delta\omega_{\Pi}$

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega_{\Pi}.$$

При цьому однакову добротність (якість) мають фільтри з більшою смугою прозорості, якщо у стільки ж разів збільшити центральну частоту фільтра ω_0 (рис. 3.7).

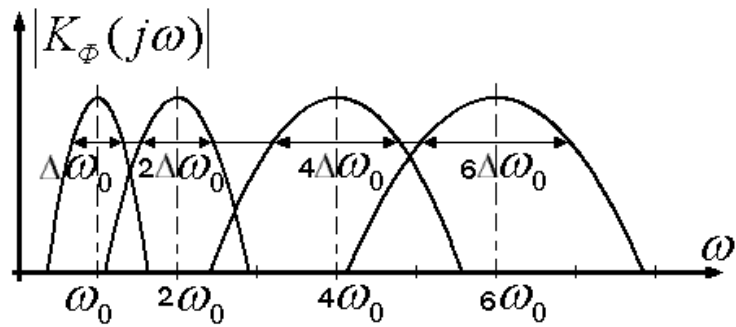


Рис.3.7

Тобто із зростанням частоти роздільна здатність зменшується (зростає абсолютне значення смуги прозорості фільтрів). При зростанні смуги прозорості часового вікна роздільна здатність за часом зменшується, але разом із цим зменшується смуга прозорості по частоті відповідного йому частотного вікна, тобто збільшується роздільна здатність за частотою.

З теорії передачі сигналів відомо, що для всіх простих сигналів (тобто відеосигналів та їх амплітудно модульованих аналогів) база сигналу β , тобто добуток ефективної ширини спектра Фур'є та ефективної довжини сигналу

$$\beta = \omega_0 \times \Delta t_{min} = 2\pi \times (1 \dots 3),$$

що нагадує вираз (3.10) і є для простих сигналів наслідком теореми про зміну масштабу.

Отже, наведені вище приклади (ряд яких можна значно розширити за рахунок ситуацій, що мають місце в радіотехніці, фізиці, механіці і т.ін.) пояснюють появу вейвлет-перетворень, які знайшли в наш час широке застосування.

Пара прямого та зворотного вейвлет-перетворень має вигляд

$$W(a, \tau) = (1/\sqrt{a}) \times \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \times h^*((t - \tau)/a) dt, \quad (3.12a)$$

$$x(t) = c \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(a, \tau) \times h((t - \tau)/a) \times da d\tau / a^2. \quad (3.12б)$$

Тут c – константа, яка залежить від обраної вейвлет-функції $h_{a,\tau}(t)$; a – скейл (шкала, масштаб частотного діапазону); $*$ – знак комплексного спряження. Зображення $W(a, \tau)$ на двовимірній площині координат називають **скейлограмою** (на відміну від **спектрограми** локального перетворення Фур'є). Ядро вейвлет-перетворення (базисну функцію) $h(t)$ називають **материнською функцією**. Всі інші функції для різних масштабів (і різного положення на осі часу) отримують із неї

$$h_{a,\tau}(t) = h((t - \tau)/a). \quad (3.13)$$

Материнська функція, як і усі інші вейвлет-функції $h_{a,\tau}(t)$ представляють собою вікно, заповнене трансформантами перетворення Фур'є.

Розглянемо більш детально перетворення (3.13) на прикладі вікна, заповненого трансформантами ортогонального перетворення.

В цьому випадку материнська функція має вигляд

$$h_F(t) = w(t) \times e^{-j\omega t}, \quad (3.14a)$$

а функція із зсувом на час τ та масштабом a має вигляд

$$h_{a,\tau}(t) = w(t - \tau)/a \times e^{-j\omega t/a}. \quad (3.14b)$$

В виразі (3.14a) $w(t)$ – материнське вікно, наприклад, у вигляді апроксимації Гауссового дзвона за Хеммінгом, Хеннінгом, Барлетом, прямокутне тощо; $w(t/a)$ – вікно зі смугою, збільшеною в a разів.

Відміну вейвлет-Фур'є від локального перетворення Фур'є демонструє рис.3.7. Так на рис. 3.7,а зображено дійсні частини ядра $e^{-j\omega_1 t}$, $e^{-j\omega_2 t}$ у вікні із постійною смугою прозорості, а на рис.3.7,б – дійсні частини відповідних ядер при зміні масштабу: $a=1$; $a=1/2$.

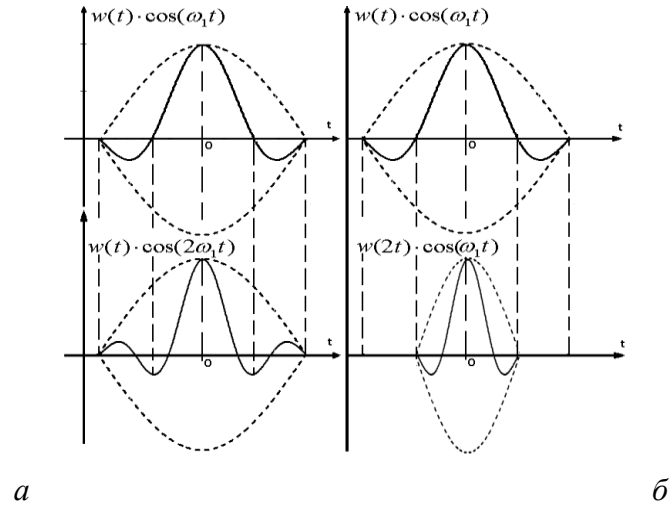


Рис. 3.7

Аналогічний вигляд мають вікна, заповнені уявною складовою ядра для ЛПФ та вейвлет-Фур'є (рис. 3.8,а та 3.8,б).

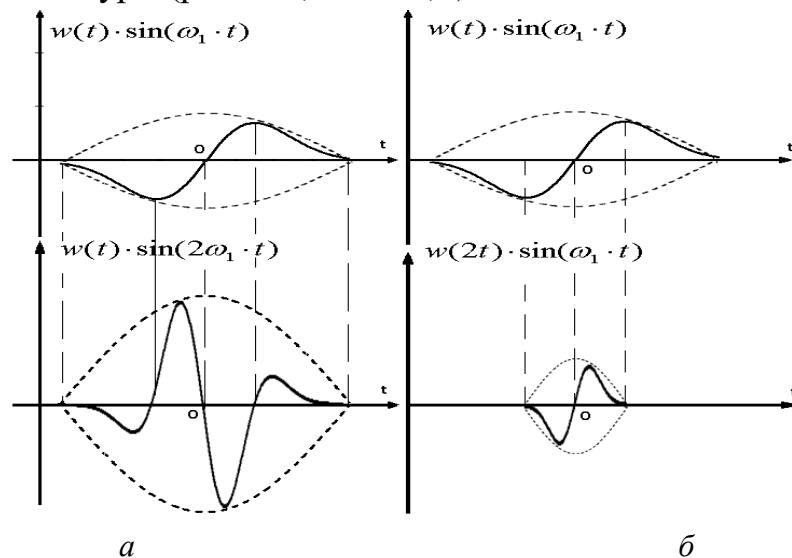


Рис.3.8

Амплітудну характеристику спектрів добутків (рис.3.7, 3.8) вікна на ядро перетворення для ЛПФ та Вейвлет-Фур'є наведено на рис. 3.9,а та рис. 3.9,б відповідно

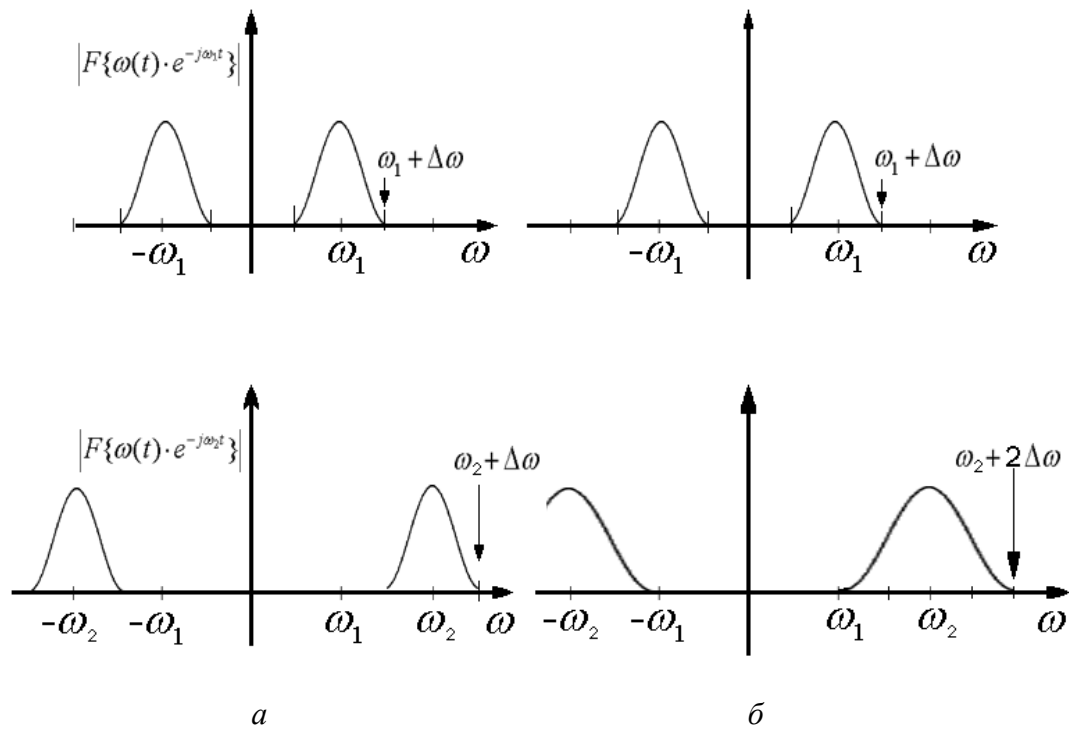


Рис.3.9

На площині аргументів області визначеності для ЛПФ та Вейвлет-Фур'є, зумовлені смугами прозорості вікон для різних частот наведені на рис. 3.10. Так, на рис. 3.10а,б наведено ширину часового вікна для різних центральних частот ω_i , а на рис. 3.10в, г – частотні вікна для ЛПФ та вейвлет-Фур'є відповідно

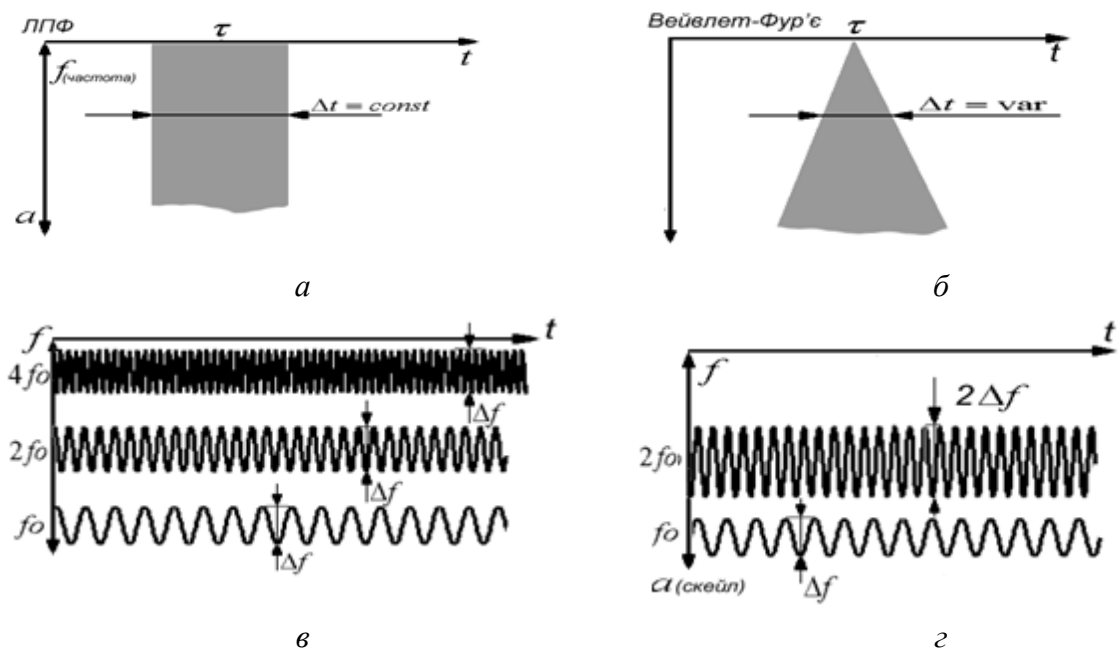


Рис.3.10

Як видно з формул прямого та зворотного вейвлет-перетворень, обчислення інтегралів (3.12), особливо у випадку, коли вікно Гауссове, зустрічає великі труднощі. Тому, як і для усіх глобальних та локальних перетворень, для обчислень використовують дискретне вейвлет-перетворення.

РОЗДІЛ 4. РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ З ВИКОРИСТАННЯМ НОРМАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЗА КРИТЕРІЄМ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ

4.1 Вступні зауваження

У другому розділі було розглянуто методи нормалізації дискретних ортогональних перетворень (за кроком та за рівнем), а також метод створення дискретного ортогонального перетворення за еталонним сигналом. Ці методи використовуються для класифікації сигналів (образів). Нижче більш детально розглянемо такий вид аутентифікації особи, як аутентифікація (розпізнавання) особи за її динамічно введеним підписом. Такі системи розпізнавання використовують в системах доступу до певної інформації, коли сам процес введення підпису (проекції на координати x, y площині підпису миттєвих положень олівця особи, що ставить свій підпис, тобто функції часу $x(t), y(t)$). Як будь-яка система класифікації система аутентифікації повинна пройти етап навчання на навчальній множині сигналів даного класу. Такою навчальною множиною є статистично репрезентативна вибірка підписів особи, яку у подальшому класифікатор повинен аутентифікувати. При навчанні класифікатора усі підписи навчальної множини нормують у часі та за амплітудою (з метою ліквідації впливу масштабу), після чого обчислюють оцінку математичного очікування кожної з траєкторій $x(t), y(t)$. Як показує досвід, для одержання надійного результату достатньо усереднити 20...30 підписів з навчальної множини. Одержання математичного очікування проекцій $x(t), y(t)$ динамічно введених підписів даної особи означає завершення навчання класифікатора. Враховуючи те, що з часом психофізичні властивості особи можуть змінюватися, підписи, отримані на етапі експлуатації класифікатора, можуть бути враховані для корекції математичного очікування траєкторій.

4.2 Алгоритм аутентифікації

Задачу чисельної оцінки відмінності або подібності еталонного сигналу (математичного очікування траєкторії розкладу) та поточно введеного сигналу (підпису особи, що підлягає аутентифікації) в даному випадку будемо розв'язувати, використовуючи нормальне ортогональне перетворення, перша трансформанта якого з точністю до постійного множника співпадає з еталонним сигналом. При цьому нормальне перетворення матиме лише одну ненульову трансформанту, а чисельну оцінку співпадіння (або відмінностей) досліджуваного і еталонного сигналів зручно виконувати за допомогою коефіцієнта трансформант, або зворотною

від нього величини – гостротою. Математичні очікування відповідних реалізацій, що надалі будуть використовуватися системою аутентифікації як еталонні сигнали обчислюють за формулами

$$\bar{M}_x = \mathcal{M}(\bar{X}_H) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \bar{X}_{Hi}; \bar{M}_y = \mathcal{M}(\bar{Y}_H) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \bar{Y}_{Hi}. \quad (4.1)$$

На базі еталонних сигналів \bar{M}_x та \bar{M}_y (4.1) формуються дві матриці нормального перетворення відповідно $\bar{W}_{\Sigma Nx}$ та $\bar{W}_{\Sigma Ny}$ згідно алгоритму, описаному в другому розділі роботи.

Для всіх реалізацій компонент динамічно введених підписів, отриманих під час реєстрації, спочатку обчислюються їх спектри нормального перетворення

$$\bar{X}_{\xi i} = \bar{W}_{\Sigma Nx} \times \bar{X}_{Hi}; \bar{Y}_{\xi i} = \bar{W}_{\Sigma Ny} \times \bar{Y}_{Hi}, \quad (4.2)$$

а потім коефіцієнти трансформант

$$k_{\text{трxi}} = \sqrt{\sum_{n=2}^N x_{\xi in}^2} / \sqrt{x_{\xi i1}^2}; k_{\text{трыi}} = \sqrt{\sum_{n=2}^N y_{\xi in}^2} / \sqrt{y_{\xi i1}^2}, \quad (4.3)$$

де $i = 1 \dots D$.

Порогове значення коефіцієнту трансформант кожної компоненти визначається як максимальне з коефіцієнтів трансформант нормального перетворення реалізацій підписів з навчальної вибірки

$$k_{\text{норx}} = \max(k_{\text{трxi}});$$

$$k_{\text{нору}} = \max(k_{\text{трыi}}).$$

Таким чином в базі системи аутентифікації мають зберігатися наступні дані про щойно зареєстрованого користувача: його login, дві виборки по 20 нормованих реалізацій для кожної з компонент підпису, дві матриці нормального перетворення та два порогових значення коефіцієнтів трансформант.

При здійсненні спроби отримання доступу до інформаційної системи користувач вводить свій login, та динамічний підпис, що тепер являє собою тестовий сигнал.

Кожна компонента тестового сигналу піддається нормалізації. Для \bar{X}'_n та \bar{Y}'_n знаходяться значення коефіцієнтів трансформант $k'_{\text{трx}}$ та $k'_{\text{тры}}$ в області нормального перетворення згідно заявленого login-у.

При не перевищенні порогових значень коефіцієнтів трансформант

$$k'_{\text{трx}} \leq k_{\text{норx}};$$

$$k'_{\text{тры}} \leq k_{\text{нору}}$$

приймається рішення про відповідність підпису особі.

В цьому разі нормований підпис доповнює виборку, що зберігається у базі даних, корегуються математичні очікування компонент, а відтак і матриці нормального перетворення та порогові значення коефіцієнтів трансформант.

4.3 Приклади роботи алгоритму аутентифікації

Дослідження роботи алгоритму аутентифікації особи на основі імовірнісних характеристик отриманих результатів можливе лише за умови наявності великої кількості експериментальних даних – реальних підписів різних осіб. Для цього було залучено 20 осіб, кожна з яких вводила по 100 підписів впродовж декількох днів, по 10 – 15 підписів щодня. Обробку експериментальних даних продемонструємо на прикладі динамічних підписів трьох осіб, умовно позначених як особи A , B і C .

На рис. 4.1 представлено реалізації підписів осіб A , B і C .

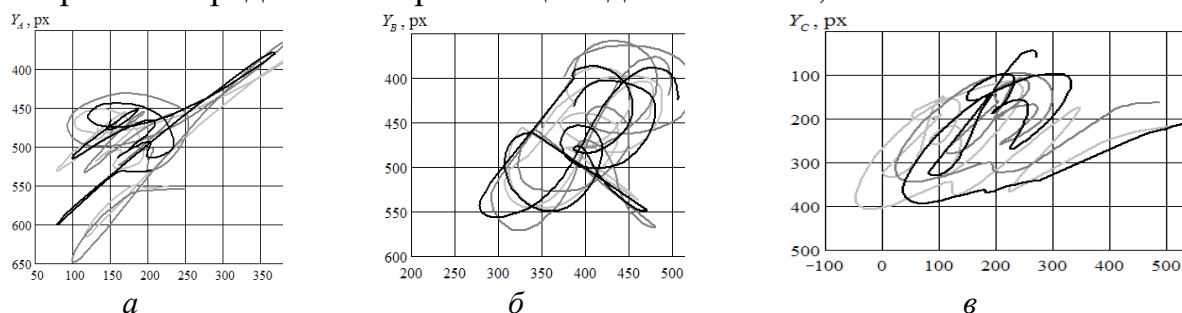


Рис. 4.1

Нормовані компоненти динамічних підписів трьох осіб A – C , відповідно, отримані після попередньої обробки, та їх математичні очікування наведені на рис. 4.2 – 4.4.

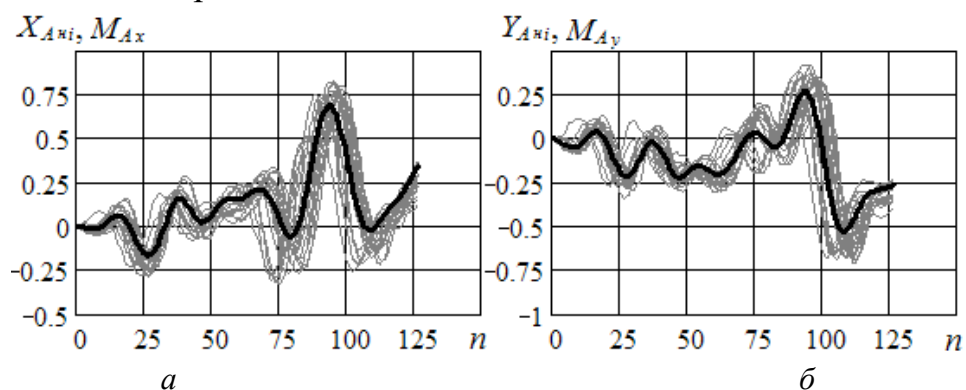


Рис. 4.2.

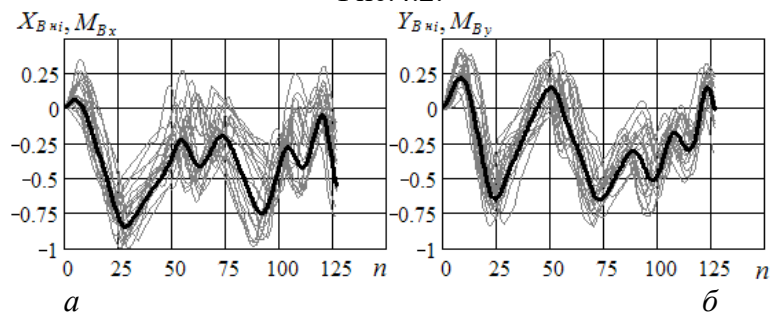


Рис. 4.3.

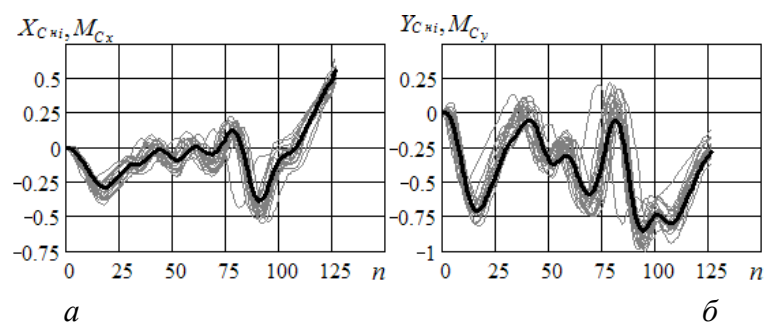


Рис. 4.4.

Деякі (1-ша – 5-та, 9-та, 17-та та 33-тя) трансформанти матриці нормального перетворення $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N_{Ax}}$, побудованої на базі математичного очікування \overline{M}_{Ax} як еталонного сигналу для компоненти \overline{X}_{An} підпису особи A, представлено на рис. 4.5.

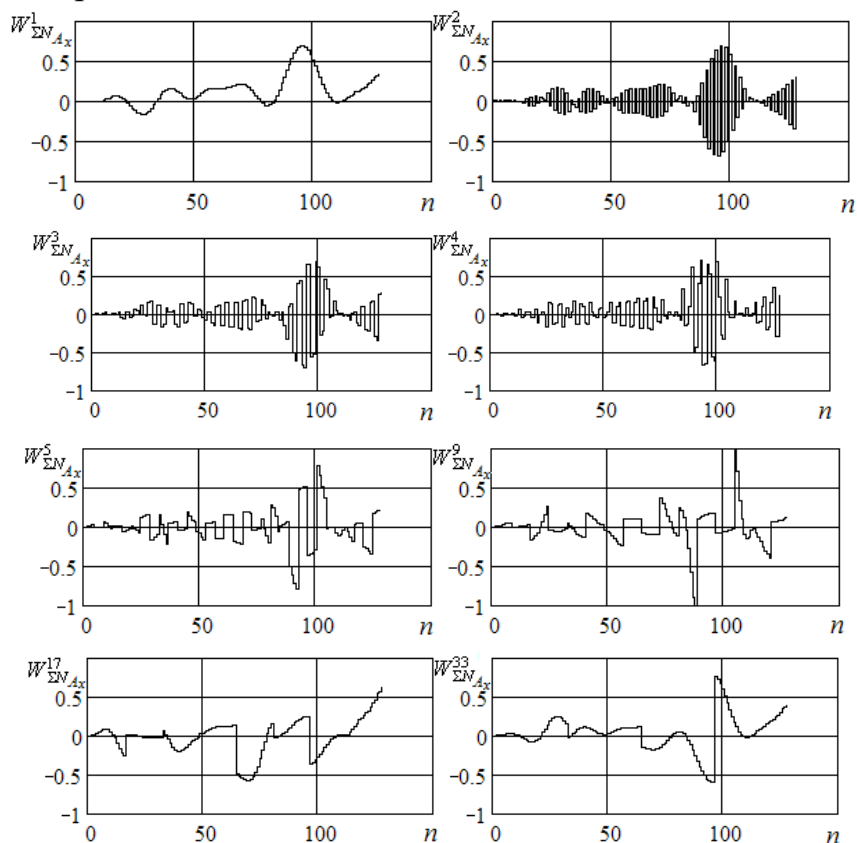


Рис. 4.5.

На рис. 4.6 зображено 1-ша – 5-та, 9-та, 17-та та 33-тя трансформанти матриці нормального перетворення $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N_{Ay}}$, створеної на основі математичного очікування \overline{M}_{Ay} для розпізнавання компоненти \overline{Y}_{An} підпису особи A.

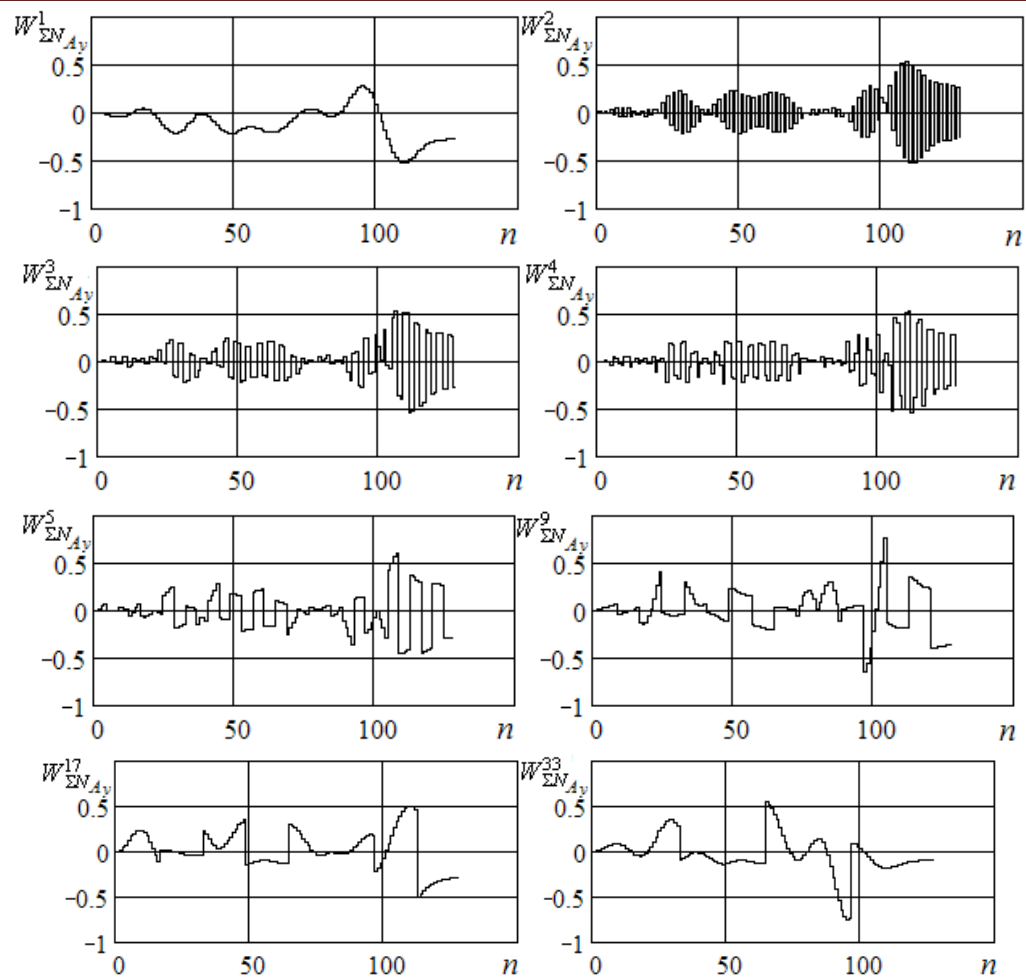


Рис. 4.6.

Спектри кількох реалізацій нормованих компонент підписів осіб A , B і C в області перетворення $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N_{Ax}}$ та $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N_{Ay}}$ приведено на рис. 4.7 – 4.9 та рис. 4.10 – 4.12 відповідно.

Спектр реалізації компоненти $\overline{\overline{X}}_{An}$ підпису особи A в області перетворення $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N_{Ax}}$

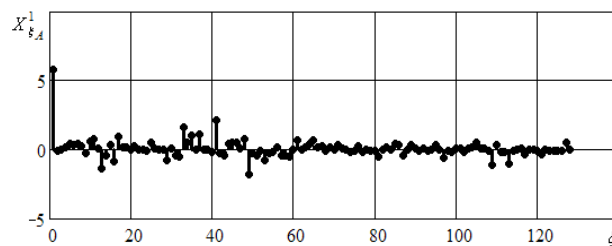


Рис. 4.7.

Спектр реалізації компоненти $\overline{\overline{X}}_{Bn}$ підпису особи B в області перетворення $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N_{Ax}}$

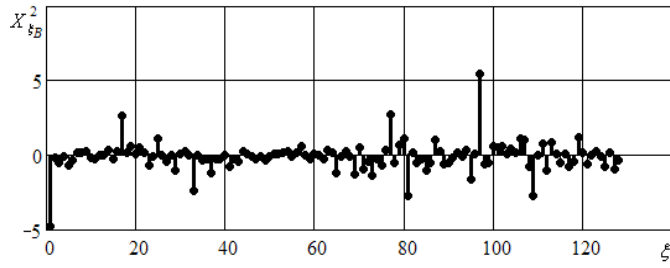


Рис. 4.8.

Спектр реалізації компоненти \overline{X}_{Cn} підпису особи C в області перетворення $\overline{W}_{\Sigma N_{Ax}}$

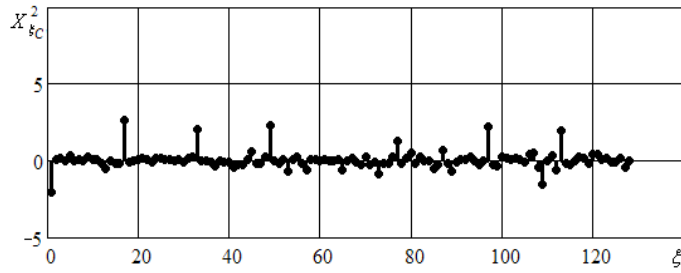


Рис. 4.9.

Спектр реалізації компоненти \overline{Y}_{An} підпису особи A в області перетворення $\overline{W}_{\Sigma N_{Ay}}$

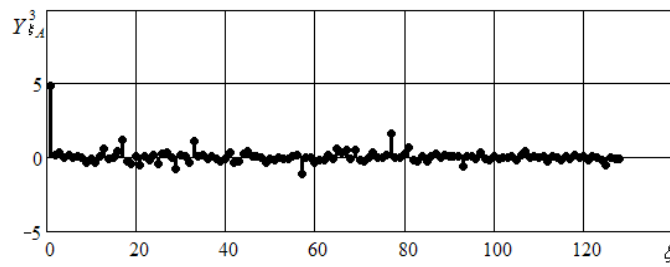


Рис. 4.10.

Спектр реалізації компоненти \overline{Y}_{Bn} підпису особи B в області перетворення $\overline{W}_{\Sigma N_{Ay}}$

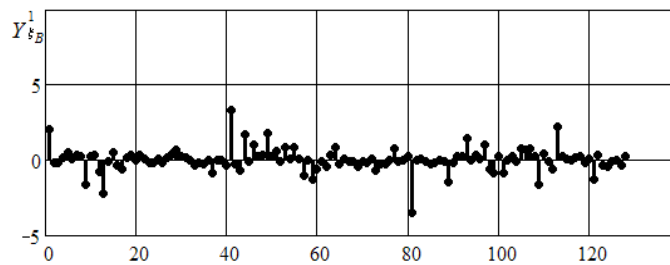


Рис. 4.11.

Спектр реалізації компоненти \overline{Y}_{Ci} підпису особи C в області перетворення $\overline{W}_{\Sigma N_{Ay}}$

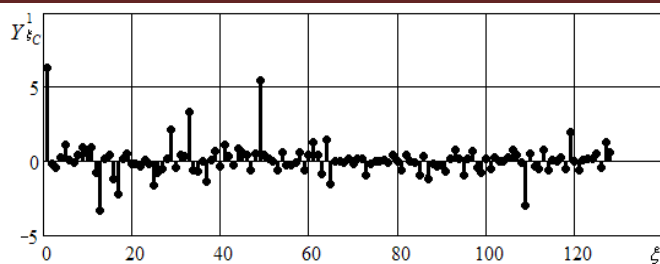


Рис. 4.12.

Результати обчислення коефіцієнтів трансформант для вибірки з 100 підписів кожної особи дозволило обчислити оцінку порогових значень коефіцієнтів трансформант для проекцій $x(t)$, $y(t)$, наведених в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
$k_{пор\ x}$	1,111719	0,720871	1,680813
$k_{пор\ y}$	3,485628	0,714197	0,676558

В результаті проведення обчислень для осіб *A*, *B* та *C* були отримані (таблиця 4.2) ймовірнісні характеристики алгоритму аутентифікації особи за динамічним підписом: ймовірність правильного розпізнавання $p_{ПР}$ (надання доступу людині, яка на це має право), ймовірність надання доступу людині, яка не має на це право (ймовірність помилки II-го роду) p_{II} , ймовірність не розпізнавання підпису людини, що має право доступу (ймовірність помилки I-го роду) p_I , ймовірність правильного не розпізнавання $p_{ПН}$.

Таблиця 4.2.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
$p_{ПР}$	0,98	0,98	0,97
p_I	0,02	0,02	0,03
p_{II}	0	0	0
$p_{ПН}$	1	1	1

Таким чином, застосування класифікатора для аутентифікації особи за динамічно введеним підписом на основі нормального перетворення математичних очікувань проекцій $x(t)$, $y(t)$ дає надійні результати, а сам алгоритм аутентифікації простий і не потребує значних обчислювальних ресурсів.

В той самий час слід додати, що розпізнавання образів при використанні нормального перетворення не завжди дає позитивні результати для інших класів сигналів. Так, наприклад, при розпізнаванні голосних звуків української мови «а», «о», «у», «е» за фонограмами відміни графоелементів цих звуків такі «тонкі», що нормальні перетворення їх математичних очікувань мало відрізняються між собою і класифікатор побудований так

само, як для динамічно введених підписів, ці звуки не розрізняє. Але існують більш тонкі методи, які є більш трудомісткими, але дозволяють розв'язати задачу розпізнавання і для таких сигналів. В першу чергу, це методи оцінки максимальної правдоподібності події, яка полягає в тому, що даний сигнал належить до даного класу.

4.4 Розпізнавання образу за критерієм максимальної правдоподібності

Нехай існує сукупність сигналів $x_i(t)$, які належать до класу ω_i . Дискретизація сигналів цієї сукупності дозволяє представити їх як вектор-стовпці \bar{x} , а імовірність приналежності цих сигналів до класу ω_i . Якщо щільність ймовірностей ансамблю реалізацій сигналів класу ω_i можна описати (або «покрити») нормальним (Гауссовим) законом, то імовірність приналежності невідомого сигналу \tilde{x} до цього класу можна обчислити за формулою

$$P(\tilde{x}/\omega_i) = \frac{1}{(2\pi)^{2/N} \times \sqrt{\det(\overline{\text{Cor}}(\bar{x}))}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \times (\tilde{x} - \bar{M}_i)^T \times \overline{\text{Cor}}^{-1} \times (\tilde{x} - \bar{M}_i)\right\}, \quad (4.4)$$

де \bar{M}_i – стовпець математичних очікувань дискретних відліків стовпів \bar{x} , отриманих з навчальної множини сигналів класу ω_i , розміру $N \times 1$; $\overline{\text{Cor}}(\bar{x})$ – кореляційна матриця $\overline{\text{Cor}}(\bar{x}) = \mu\{(\bar{x} - \bar{M}_i) \times (\bar{x} - \bar{M}_i)^T\}$ випадкових відхилень сигналів класу ω_i від їх математичного очікування порядку N ; $\det(\overline{\text{Cor}}(\bar{x}))$ – визначник кореляційної матриці; \tilde{x} – стовпець відліків невідомого за класом сигналу розміру $N \times 1$; T – знак транспонування; $\mu\{\cdot\}$ – оператор математичного очікування.

Для створення класифікатора (4.4) треба за ансамблем реалізацій (навчальною множиною) сигналів відомого класу ω_i виконати дискретизацію, обчислити математичні очікування дискретних відліків, за тією ж навчальною множиною обчислити матрицю $\overline{\text{Cor}}(\bar{x})$, після чого знайти зворотну до неї матрицю. Цим навчання класифікатора буде виконане. При обчисленні імовірності $P(\tilde{x}/\omega_i)$ виникають складнощі, пов'язані з поганою зумовленістю матриці $\overline{\text{Cor}}(\bar{x})$, що, в загальному випадку, робить проблематичним її обернення. Крім того, вже в процесі класифікації обчислення експоненти, як відомо, створює додаткові труднощі. Тому для того, щоб не обчислювати експоненти, обчислюють лише головну частину степені в (5.4), яке називають дискримінантним числом

$$D = (\tilde{x} - \bar{M}_i)^T \times \overline{\text{Cor}}^{-1} \times (\tilde{x} - \bar{M}_i). \quad (4.5)$$

Чим менше дискримінантне число, тим більше імовірність приналежності сигналу \tilde{x} до класу ω_i (мінімальне значення $D = 0$). В процесі навчання класифікатора визначають для кожного класу $\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_k, \dots$

максимальне з порогових значень $D_{\min i}$. Якщо тепер для досліджуваного сигналу \tilde{x} дискримінантне число $D \leq D_{\min i}$, то сигнал \tilde{x} належить до класу ω_i . Крім того, по ансамблям реалізацій сигналів інших класів за формулою (4.5) для класу ω_i знаходять мінімальне з порогових значень $D_{\max i}$. Якщо тепер для досліджуваного сигналу \tilde{x} дискримінантне число, отримане за формулою (4.5) $D \geq D_{\max i}$, то досліджуваний сигнал не належить до класу ω_i , а належить до одного з інших класів навчальної множини. Перебираючи дискримінантні числа для усіх класів, знайдемо той клас ω_k , для якого $D \leq D_{\min k}$.

Більш складну задачу являє собою обернення кореляційної матриці, яка звичайно є погано зумовленою, тобто її визначник або наближається до нуля (машинний нуль), або тотожний нулю. Для прояснення питання визначеності (зумовленості) матриці $\overline{\overline{Cor}}(\tilde{x})$ скористаємося розкладом цієї матриці на власні значення та власні вектори.

4.4.1 Розклад матриці на її власні значення та власні вектори

Власними значеннями λ_i матриці $\bar{\bar{A}}$ називають корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN}-\lambda \end{vmatrix} \equiv 0, \quad (4.6)$$

де a_{ij} – елементи матриці $\bar{\bar{A}}$, $|\cdot|$ – визначник цієї матриці. Розв’язання цього рівняння дає N коренів λ_i , де N – порядок матриці $\bar{\bar{A}}$.

Власними векторами $\bar{\pi}_i$ матриці $\bar{\bar{A}}$ є розв’язки рівнянь вигляду

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_i & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN}-\lambda_i \end{bmatrix} \times \bar{\pi}_i = \bar{0} \quad (4.7)$$

де $\bar{0}$ – стовпець нулів.

Якщо матриця $\bar{\bar{A}}$ є позитивно напіввизначеною (такою матрицею є кореляційна матриця $\overline{\overline{Cor}}(\tilde{x})$), то її можна представити у вигляді розкладу

$$\bar{\bar{A}} = (\bar{\bar{\Pi}})^T \times \bar{\bar{\lambda}} \times \bar{\bar{\Pi}}, \quad (4.8)$$

де $\bar{\bar{\Pi}}$ – квадратна матриця порядку N , стовпцями якої є власні вектори, $\bar{\bar{\lambda}}$ – діагональна матриця власних значень λ_i ; T – знак транспонування.

В більш загальному випадку, якщо власні значення комплексні, але існує діагональна матриця власних значень, розклад (4.8) можна представити у вигляді

$$\bar{A} = (\bar{P}^*)^T \times \bar{\lambda} \times \bar{P}, \quad (4.9)$$

де $*$ – знак комплексного спряження.

Обернену матрицю \bar{A}^{-1} можна записати у вигляді розкладу

$$\bar{A}^{-1} = (\bar{P}^*)^T \times \bar{\lambda}^{-1} \times \bar{P}, \quad (4.10)$$

де $\bar{\lambda}^{-1}$ – обернена діагональна матриця власних значень.

З виразу (4.10) видно, що матриця власних значень є маркером для визначення рангу матриці \bar{A} . Існування чи не існування оберненої матриці \bar{A}^{-1} залежить від того, чи дорівнюють нулю будь-які з власних значень λ_i . Так, при нульовому значенні λ_i в матриці $\bar{\lambda}^{-1}$ будемо мати ділення на нуль. При розв'язанні ряду задач матриця $\bar{A} = \overline{\text{Cor}}(\bar{x})$ може вміщувати в собі збиткову інформацію, що призведе до того, що багато з власних значень будуть дорівнювати нулю. Тобто наявність нульових власних значень в матриці $\overline{\text{Cor}}(\bar{x})$ буде свідчити про збитково велику кількість відліків досліджуваного сигналу \bar{x} .

4.4.2 Навчання класифікатора максимальної правдоподібності та модифікований метод розпізнавання образів

Основна складність реалізації класифікатора (4.4) полягає в наявності великої кількості нульових власних значень розкладу

$$\overline{\text{Cor}}(\bar{x}) = \bar{P}^{*T} \times \bar{\lambda} \times \bar{P} \quad (4.11)$$

на власні значення λ_i в діагональній матриці $\bar{\lambda}$.

Обернена матриця

$$\overline{\text{Cor}}^{-1}(\bar{x}) = \bar{P}^{*T} \times \bar{\lambda}^{-1} \times \bar{P} \quad (4.12)$$

при наявності власних значень λ_i , рівних нулю не існує, а при «малих» λ_i є погано зумовленою.

Наявність нулів або «малих» власних значень в матриці $\bar{\lambda}$ свідчить про неможливість реалізації критерію (4.5), якщо кореляційна матриця містить у собі збиткову інформацію (наприклад, при «малому» кроці дискретизації два послідовні за номером рядки матриці $\overline{\text{Cor}}(\bar{x})$ будуть тотожні або «майже» тотожні, що забезпечує нульове значення або «мале» значення λ_i). Ясно, що для запобігання цього крок дискретизації слід збільшити, або (у випадку, коли лише окремі графоелементи мають «сильно» корельовано форму) проводити дискретизацію зі змінним кроком. Усе згадане вірно для сигналів

кожного окремого класу ω_i , але як величина кроку при еквідистантній дискретизації, так і порядок зміни величини кроку при дискретизації зі змінним кроком для кожного класу сигналів звичайно є різними. Це значно ускладнює створення і навчання класифікаторів сигналів (образів).

Тому при класифікації за критерієм максимальної правдоподібності слід метод класифікації модифікувати так, щоб дискримінантні числа можна було б розраховувати без обернення матриці $\overline{Cor}(\bar{x})$.

Так, з виразу (4.11) можна отримати

$$\bar{P} \times \overline{Cor}(\bar{x}) \times \bar{P}^{*T} = \bar{\lambda}, \quad (4.12a)$$

звідки

$$\bar{P} \times \overline{Cor}(\bar{x}) \times \bar{P}^{*T} - \bar{\lambda} = 0. \quad (4.12b)$$

Тобто добуток в (4.12a) дає діагональну матрицю власних значень. Тепер, якщо взяти будь-який сигнал \bar{x} з ансамблю реалізацій, що утворює клас ω_i , і утворити тільки для одного такого сигналу матрицю «миттєвої» кореляції

$$\widetilde{Cor} = (\bar{x} - \bar{M}_i)^T \times (\bar{x} - \bar{M}_i), \quad (4.13)$$

то добуток

$$\bar{P} \times \widetilde{Cor} \times \bar{P}^{*T} = \tilde{\lambda}$$

дасть матрицю $\tilde{\lambda}$, яка вже буде відрізнятися від діагональної $\bar{\lambda}$, але така відміна буде «невеликою». Якщо тепер сигнал \tilde{x} не належить до класу ω_i , то така відміна буде «великою». Для обчислення чисельної міри відміни матриць $\tilde{\lambda}$ та $\bar{\lambda}$ (а тим самим сигналів) вводять поняття норми

$$\delta = \|\bar{P} \widetilde{Cor} \bar{P}^{*T} - \bar{\lambda}\|, \quad (4.14)$$

де $\|\cdot\|$ означає норму [16] відхилення добутку $\bar{P} \widetilde{Cor} \bar{P}^{*T}$ від матриці $\bar{\lambda}$.

Якщо як норму $\|\cdot\|$ в (4.14) використовують норму **Евкліда**, то позначивши $\tilde{\lambda} = \bar{P} \widetilde{Cor} \bar{P}^{*T}$ з ненульовими елементами l_{ij} , розташованими не тільки в діагоналі цієї матриці, отримаємо

$$\delta = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (l_{ij} - \lambda_{ij})^2 \right]^{1/2}. \quad (4.15a)$$

Норма за **Хеммінгом** має вигляд

$$\delta = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |l_{ij} - \lambda_{ij}|, \quad (4.15b)$$

а за **Чебишовим**

$$\delta = \max_{ij} \{|l_{ij} - \lambda_{ij}|\}. \quad (4.15c)$$

Аналогічно в процесі навчання класифікатора визначаємо $\delta_1 < \delta_2$ так, що, якщо $\delta \leq \delta_1$, то сигнал \tilde{x} належить до класу ω_i , якщо $\delta \geq \delta_2$ – то ні.

4.4.3 Алгоритм класифікації з уточненням. Зв'язок між нормальним класифікатором та класифікатором за критерієм максимальної правдоподібності

Для обґрунтування можливості та створення алгоритму переходу від менш надійного методу розпізнавання образу на базі нормального перетворення до більш надійного (але і більш трудоемного) методу розпізнавання образу на базі використання ортогонального розкладу кореляційної матриці (4.14), (4.15).

Для цього розглянемо зв'язок між кореляційною матрицею $\overline{\overline{Cor}}$ (4.4) в натуральних координатах і кореляційною матрицею, побудованою для прирощень амплітуд трансформант нормального перетворення випадкових відхилень відліків досліджуваного сигналу від математичних очікувань цих відліків. Нагадаємо, що в разі нормального перетворення \overline{W}_N математичного очікування \overline{M}_i спектр

$$\overline{M}_\xi = \overline{W}_N \times \overline{M}_i$$

містить в собі тільки одну ненульову трансформанту.

Нехай по кожному нормальному спектру для кожного стовпця випадкових прирощень обчислено вектор-стовпець нормального перетворення

$$\overline{\Delta x}_\xi = [\Delta x_{\xi 1}, \Delta x_{\xi 2}, \dots, \Delta x_{\xi N}]$$

Тоді кореляційна матриця для випадкових прирощень сигналів класу ω_i в натуральних координатах може бути обчислена як

$$\overline{\overline{Cor}} = \mu\{\overline{W}_N^{-1} \times \overline{\Delta x}_\xi \times \overline{\Delta x}_\xi^T \times (\overline{W}_N^T)^{-1}\}, \quad (4.16)$$

де $\mu\{\cdot\}$ – математичне очікування; $\overline{W}_N^{-1} = \overline{W}_N^T$ [1-5] – матричний оператор зворотного дискретного нормального перетворення.

З (4.16) отримуємо

$$\overline{\overline{Cor}} = \overline{W}_N^T \times \mu\{\overline{\Delta x}_\xi \times \overline{\Delta x}_\xi^T\} \times \overline{W}_N = \overline{W}_N^T \times \overline{\overline{Cor}}_\xi \times \overline{W}_N \quad (4.17)$$

З виразів (4.4), (4.17) отримуємо

$$\overline{P}^{*T} \times \overline{\lambda} \times \overline{P} = \overline{W}_N^T \times \overline{\overline{Cor}}_\xi \times \overline{W}_N,$$

звідки ортогональний розклад кореляційної матриці спектральних прирощень має вигляд

$$\overline{\overline{Cor}}_\xi = \overline{W}_N \times \overline{P}^{*T} \times \overline{\lambda} \times \overline{P} \times \overline{W}_N^T.$$

Позначивши в останньому виразі

$$\overline{P}_\xi^{*T} = \overline{W}_N \times \overline{P}^{*T}; \quad \overline{P}_\xi = \overline{P} \times \overline{W}_N^T,$$

отримаємо формулу ортогонального розкладу

$$\overline{\overline{Cor}}_{\xi} = \overline{\overline{P}}_{\xi}^{*T} \times \overline{\lambda} \times \overline{\overline{P}}_{\xi}, \quad (4.18)$$

аналогічну (4.11).

Оскільки при створенні кореляційного класифікатора (3)-(6) вже обчислено матриці $\overline{\lambda}$, $\overline{\overline{P}}^*$, $\overline{\overline{P}}^T$, а при класифікації за нормальним перетворенням – матриця $\overline{\overline{W}}_N$, то перехід до розкладу (10) не потребує значних витрат.

При цьому, отримаємо

$$\delta_{\xi} = \left\| \overline{\overline{P}}_{\xi} \times \widetilde{Cor}_{\xi} \times \overline{\overline{P}}^{*T} - \overline{\lambda} \right\|, \quad (4.19)$$

де \widetilde{Cor}_{ξ} – матриця миттєвої кореляції, створена для спектра тільки однієї реалізації досліджуваного сигналу \tilde{x} .

Результати обчислень дискримінантного числа для того самого сигналу за виразами (4.19) та (4.14) дали тотожні результати, тобто (як і очікувалось) $\delta_{\xi} = \delta$.

Отже, при наявності двох класифікаторів: нормального (обчислені значення $\overline{\overline{W}}_N$ та K_{Tmin} , K_{Tmax}) та кореляційного (обчислені значення $\overline{\lambda}$ та $\overline{\overline{P}}$ або $\overline{\overline{P}}_{\xi}$) алгоритм класифікації з уточненням (в разі необхідності) має наступний вигляд.

1. Для досліджуваного сигналу $\tilde{x}(t)$ провести дискретизацію з дискримінантним кроком і отримати вектор відліків $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N]^T$.
2. Знайти нормальний спектр \tilde{x}_{ξ} сигналу \tilde{x} (6а).
3. Обчислити значення коефіцієнта трансформант досліджуваного сигналу (див. розділ 2).
4. Якщо різниця між K_{Tmax} і K_{Tmin} «велика», то класифікацію можна вважати такою, що з великою імовірністю відповідає дійсному стану речей. В протилежному випадку слід скористатися класифікатором (4.19) і перейти до пункту 5 алгоритму.
5. Побудувати матрицю миттєвої кореляції \widetilde{Cor}_{ξ} для випадкових прирощень нормального спектру і обчислити дискримінантне число δ_{ξ} .

Проілюструємо роботу алгоритму з уточненням на прикладі динамічно введеного підпису особи №1, для якої було створено нормальний $\overline{\overline{W}}_N$ і кореляційний $\overline{\overline{Cor}}_{\xi}$ класифікатори. Ті самі класифікатори розпізнавали динамічно введений підпис особи №2.

Результати досліджень для серії складових $y(t)$ динамічно введених підписів в процесі навчання класифікаторів наведено в табл.4.3 і 4.4.

Так, перший рядок табл. 4.3 містить коефіцієнти трансформант підписів особи №1 (класифікатор ω_i створено для підписів цієї особи), а другий рядок – особи №2.

Табл.4.3.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_{mp Y11i}$	0.271	0.206	0.306	0.314	0.414	0.231	0.224	0.394	0.238	0.329
$k_{mp Y12i}$	0.939	0.854	0.807	0.879	0.874	0.769	0.835	0.774	0.738	0.781

Табл.4.4.

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta_{y_{11i}}$	11.71	12.31	15.56	14.75	15.86	11.69	15.54	14.89	15.55	12.89
δ_y $\delta_{y_{12i}} \cdot 10^{-3}$	2.84	3.66	4.19	2.87	4.25	3.81	3.06	4.34	3.56	3.45

З табл. 4.3 видно, що K_{Tmax} (найбільше значення коефіцієнту трансформант при вірній класифікації) становить 0,414, в той час, як для особи №2 найменше значення K_{Tmin} становить 0,738. Це свідчить про малу різницю між K_{Tmin} та K_{Tmax} і про імовірність хибної класифікації. (Зауважимо, що при класифікації за горизонтальною складовою динамічного підпису $x(t)$ результати K_{Tmin} , K_{Tmax} відрізняються не менше ніж в 10 разів і необхідності в переході до класифікатора (4.19) немає).

В той же час дискримінантні числа δ_1 і δ_2 відрізняються в сотні разів (табл. 4.4).

Таким чином, якщо прийняти для нормального класифікатора $K_{Tmax} = 0,33$, а $K_{Tmin} = 0,78$, то підпис №5 особи №1 і підписи №6, 8, 9 особи №2 попадуть в область невизначеності. Саме в цьому випадку слід використовувати кореляційний класифікатор (4.19).

Звичайно, можна було б одразу використовувати для розпізнавання образів кореляційний класифікатор. Але, абстрагуючись від трудоемності створення обох класифікаторів, слід відзначити, що трудоемність класифікації класифікатором кореляційним значно більша, ніж нормальним.

Так, кількість трудоемних операцій (множень/ділень) при класифікації кореляційним класифікатором при кількості відліків N становить $K_K = 2N^3 + N^2$, в той час, як для нормального $K_H = N^2 + N$, що може виявитися суттєвим при класифікації великої кількості різноманітних сигналів. До того ж кількість класів ω_i становить M . Кожен класифікований сигнал поступає на кожен з M класифікаторів, тому при класифікації

$$K_{Kkl} = MN^2(2N + 1); K_{Hkl} = MN(N + 1).$$

4.5 Лінійний погоджений фільтр

Лінійна фільтрація сигналу для виділення його із суміші сигналу та шуму є одним із основних процесів, що відбувається у будь-якому приймальному пристрої. Виділення сигналу із суміші можна проводити різними методами. Для задачі виявлення сигналу із шуму найпоширенішим є критерій **максимального відношення сигнал/шум** на виході фільтру. Фільтри, які відповідають такому критерію називають погодженими.

Для пояснення суті погодженої фільтрації сигналу, розглянемо найпростіший випадок, коли на вхід фільтру поступає лише один корисний сигнал $s(t)$ з відомим спектром $S(\omega)$. Сигнал має кінцеву тривалість і визначається виразом

$$s(t) = \begin{cases} \neq 0 & \text{при } t \in [0; \tau] \\ = 0 & \text{при } t \notin [0; \tau] \end{cases}. \quad (4.20)$$

Оцінимо можливу ефективність виявлення неперіодичного сигналу при його адитивній суміші з білим шумом.

Потрібно знайти фазо-частотну характеристику фільтра, при якій забезпечується максималізація піка сигналу на виході фільтру. Оскільки спектральна густина $S(\omega)$ сигналу повністю визначає його енергію і будь-яка зміна фазових відношень в спектрі не впливає на енергію, то поставлена задача рівнозначна максималізації піка вихідного сигналу при заданій енергії сигналу вхідного.

Так, якщо сигнал має спектр

$$S(\omega) = S(\omega) \times \exp[j\varphi_S(\omega)] \quad (4.21)$$

і тривалість τ , то функції

$$S(\omega) \times \exp[-j\varphi_S(\omega)] = S^*(\omega)$$

комплексно спряжена функції спектральної щільності сигналу.

Можна показати, що комплексний коефіцієнт передачі оптимального фільтра визначається як:

$$K_{opt}(\omega) = \alpha S^*(\omega) \times \exp(-j\omega\tau) \text{ або:}$$

$$K_{onm}(\omega) = \alpha S(\omega) \times \exp(-j\varphi_S - j\omega\tau). \quad (4.22)$$

Вважаючи, що фазова характеристика коефіцієнта передачі в (4.22) $\varphi_K = -\varphi_S - \omega\tau$, бачимо, що $-\varphi_S$ – компенсує фазові зсуви складових зсуву спектра сигналу (4.21), що формує "пік" імпульсу на виході, а лінійна функція $-\omega\tau$ забезпечує затримку цього "піка" на час тривалості сигналу, тобто цей пік досягається в момент закінчення сигналу. Можна сказати, що забезпечується накопичення корисного сигналу на інтервалі всього часу існування імпульсу.

Формула (4.22) встановлює також, що модуль коефіцієнта передачі повинен збігатися з модулем спектральної щільності функції заданого сигналу, тобто оптимальний фільтр послабляє спектральні складові шуму тим сильніше, чим менше модуль $S(\omega)$. В результаті повна потужність шуму на виході фільтра виявляється меншою, чим при рівномірній АЧХ.

Нарешті відзначимо, що довільна константа α розмірна. При безрозмірному $S(\omega)$ α має розмірність зворотної спектральної щільності сигналу.

4.5.1 Сигнал та шум на виході погодженого фільтра

Для визначення форми сигналу на виході використовується загальний вираз

$$s_{вих}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \times K(j\omega) \times e^{j\omega t} d\omega \quad (4.23)$$

Оскільки передаточна функція, що максимізує відношення сигнал/шум на виході фільтра

$$K(j\omega) = \alpha S^*(\omega) \times e^{-j\omega\tau}, \quad (4.24)$$

то підставивши (4.23) в (4.24), отримаємо

$$s_{вих}(t) = \alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \times S^*(\omega) \times e^{-j\omega\tau} \times e^{j\omega t} d\omega = \alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) \times e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \quad (4.25)$$

При $t = \tau$ маємо

$$s_{вих}(\tau) = \alpha E, \quad (4.26)$$

де E – енергія сигналу.

З іншого боку $s_{вих}(\tau)$ можна представити як згортку двох функцій часу $s(t)$ і $s(\tau - t)$

$$s_{вих}(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} s(t-x) \times s(\tau-x) dx.$$

Після підстановки $t-x = y$, $\tau-x = y-(t-\tau)$

$$s_{\text{вих}}(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} s(y) \times s[y - (t - \tau)] dy,$$

звідки видно, що інтеграл в правій частині виразу є кореляційною функцією вхідного сигналу $B_{\text{вх}}(t - \tau)$. Тобто

$$s_{\text{вих}}(t) = \alpha B_{\text{вх}}(t - \tau). \quad (4.27)$$

Отже, сигнал на виході фільтру з точністю до коефіцієнта α співпадає з кореляційною функцією вхідного сигналу.

При дії білого шуму кореляційна функція шуму на виході погодженого фільтру

$$B_{\text{вих}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{вих}}(\omega) \times e^{-j\omega x} d\omega = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) \times e^{j\omega x} d\omega$$

Підставляючи $K(\omega) = \alpha S(\omega)$ і враховуючи вирази (4.25) і (4.27), в яких позначимо $t - \tau = x$, отримаємо

$$\begin{aligned} B_{\text{вих}}(x) &= \alpha^2 W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) \times e^{j\omega x} d\omega = \alpha W_0 \times s_{\text{вих}}(\tau + x) = \\ &= \alpha W_0 \alpha \times B_{\text{вх}}(x) = \alpha^2 W_0 \times B_{\text{вх}}(x) \end{aligned}$$

Прирівнюємо $x=0$, знайдемо дисперсію (середню потужність) шуму на виході

$$N = B_{\text{вих}}(0) = \alpha^2 W_0 \times B_{\text{вх}}(0) = \alpha^2 W_0 \times E. \quad (4.28)$$

Відношення пікового значення сигналу $s_{\text{вих}}(t)$ до середньоквадратичного значення шуму \sqrt{N} згідно формул (4.28) та (4.26)

$$s_{\text{вих}}(\tau) / \sqrt{N} = \alpha E / \alpha \sqrt{W_0 E} = \sqrt{E / W_0}.$$

Тобто, при білому шумі відношення сигнал/шум на виході фільтру, погодженого з сигналом, залежить тільки від енергії сигналу і енергетичного спектру шуму W_0 , але не від конкретної форми сигналу.

Із цього витікає, що при заданих енергії і ширині спектрі сигналу можна надавати різну форму, вигідну для розв'язку конкретної задачі.

Слід зазначити, що оптимальний фільтр, побудований за зазначеним вище критерієм, жорстко пов'язаний з корисним вхідним сигналом: зміна корисного вхідного сигналу веде до необхідності зміни коефіцієнта передачі фільтру.

4.5.2 Цифровий погоджений фільтр

Як відомо, особливістю погодженого фільтра є те, що його імпульсна характеристика являє собою запізнілу версію дзеркального відображення

щодо осі $t=0$ вхідного сигналу. Таким чином, дзеркальне відображення сигналу $s(t)$, має вигляд $s(-t)$, а дзеркальне відображення, що запізнюється на T секунд, має вигляд $s(T-t)$. Отже, імпульсна характеристика $h(t)$, що відповідає сигналу $s(t)$, буде дорівнювати

$$h(t) = \begin{cases} s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{для інших } t \end{cases} \quad (4.29)$$

На рис. 4.13 представлена основна функція корелятора – інтегрування добутку прийнятого зашумленого сигналу з кожним опорним сигналом і визначення найкращої відповідності.

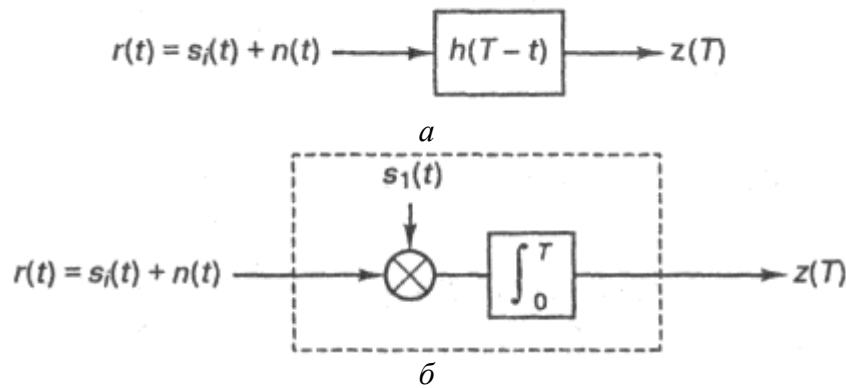


Рис. 4.13.

Наведені схеми мають на увазі використання аналогових помножувачів та інтеграторів і безперервних сигналів.

Приклад реалізації погодженого фільтра з використанням цифрових технологій і дискретних сигналів наведений на рис. 4.14. Вхідний сигнал $r(t)$ складається із сигналу-прототипу $s_i(t)$ і шуму $n(t)$; ширина смуги сигналу $W = 1/2T$, де T – тривалість передачі символу. Таким чином, мінімальна частота дискретизації по Найквісту становить $f_s = 2W = 1/T$, а час взяття вибірки (T_s) повинне бути не більше часу передачі символу.

У моменти $t = kT_s$ вибірки (як показано на рис. 4.14) зсуваються в регістрі, так, що більш ранні з них розташовуються праворуч.

При дискретизації отриманого сигналу безперервний час t замінюється дискретним kT_s або просто k , що дає право використати дискретний запис:

$$r(k) = s_i(k) + n(k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Тут індекс i визначає символ з M -арного набору сигналів, що можуть поступати на вхід, а k – дискретний час. Погоджений фільтр апроксимується регістром зсуву з ваговими коефіцієнтами $c_i(n)$, де $n = 0, 1, \dots, N - 1$ – часовий індекс вагових коефіцієнтів і розрядів регістра. Множині вагових коефіцієнтів фільтра відповідає імпульсна характеристика фільтра. Узгодження вагових коефіцієнтів з вибірками сигналу відбувається відповідно до дискретного варіанта рівняння

$$c_i(n) = s_i[(N-1)-n].$$

Використання дискретної форми інтеграла згортки дозволяє записати вираз з виходу корелятора:

$$z_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} r(k-n)c_i(n) \quad (4.30)$$

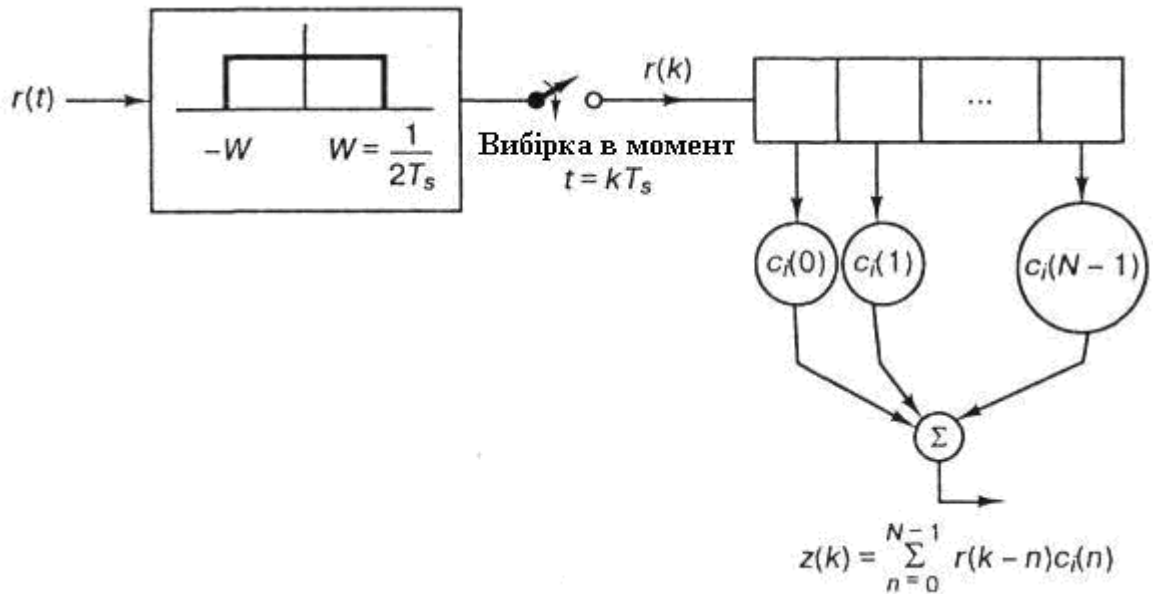


Рис. 4.14.

У формулі (4.30) вираз $r(k-n)$ можна розглядати як "вік" вибірки (як давно вона перебуває у фільтрі). n зручно розглядати як адресу вагового коефіцієнта. Передбачається, що система синхронізована, та упорядкування символів у часі відомо. Також передбачається, що шум має нульове середнє, так що математичне очікування прийнятої вибірки дорівнює:

$$M\{r(k)\} = s_i(k).$$

Отже, при передачі $s_i(k)$ математичне очікування виходу погодженого фільтра дорівнює:

$$M\{z_i(k)\} = \sum_{n=0}^{N-1} s_i(k-n)c_i(n) \quad (4.31)$$

Припускаючи, що отримано був сигнал $s_i(t)$ і для спрощення запису ми зневажили шумом, можемо записати прийняту вибірку $r(k)$ як $s(k)$. Вибірki заповнюють розряди погодженого фільтра, і наприкінці кожного періоду передачі символу в крайньому правому розряді кожного регістра розташована вибірка $k = 0$. Відзначимо, що у формулах (4.30) і (4.31) часові індекси n еталонних вагових коефіцієнтів розташовані в порядку, зворотному до часового індексу $k - n$ вибірок, що є ключовою особливістю інтеграла згортки. Те, що найбільш рання вибірка тепер відповідає крайньому правому

ваговому коефіцієнту, забезпечує значну кореляцію. Навіть якщо дію погодженого фільтра ми математично опишемо як згортку сигналу з імпульсною характеристикою фільтра, кінцевий результат буде кореляцією сигналу з копією самого себе. Із цієї причини корелятор можна реалізувати як погоджений фільтр.

Якщо синхронізувати погоджений фільтр і корелятор, їхні виходи наприкінці періоду передачі символу будуть ідентичними.

Детектування, що відбувається після виходу сигналу з погодженого фільтра, здійснюється наступним чином: для прийняття двійкового рішення, виходи $z_i(k)$ перевіряються при кожнім значенні k , що відповідає кінцю символу.

4.6 Недоліки погоджених класичних фільтрів

Як відомо, аналіз подібності сигналів і відмінностей подібних сигналів прийнято проводити за допомогою погоджених фільтрів, які будуються на базі обмежень, що не можуть бути реалізовані на практиці. Погоджені фільтри були розроблені для забезпечення максимальної чутливості до відомого сегмента сигналу S , спотвореного адитивним шумом. При певних обмежуючих припущеннях (стаціонарність сигналів і білого шуму, з нульовим середнім, значна кількість виборок сигналу S , внаслідок його частотних властивостей) сигнал повинен бути диференційованим, звідки витікає, що оптимальне детектування забезпечується кореляцією між S і сигналом що приймається X при переміщенні вектора S вздовж X так, що результат Y визначається виразом

$$Y_k = X_k^t \times S,$$

де $X_k = [x_{k-L(s)+1}, \dots, x_{k-1}, x_k]$, а $L(s)$ – кількість відліків сигналу S . Цей же результат можна записати у вигляді конволюції (згортки)

$$Y = X * h, \quad (4.32)$$

де $h = [s_{L(s)-1}, \dots, s_1, s_0]$.

Існує упередження, що такий класичний погоджений фільтр є хорошим детектором наявності чи відсутності сегмента сигналу в іншому сигналі. На жаль, це невірно навіть у випадку сигналу з нульовим шумом, для якого

$$y_k = \sum_{i=0}^{L(s)-1} s_i x_{k'+i} = \sum (s_i - S)(x_{k'+i} - X_k) + \sum S X_k, \quad (4.33)$$

де $k' = k - L(s) + 1$, $L(s)$ – довжина послідовності,

$$X_k = \frac{1}{L(s)} \sum_{i=k-L(s)+1}^k x_i; \quad S = \frac{1}{L(s)} \sum_{i=0}^{L(s)-1} s_i.$$

Оскільки другий доданок в (4.33), отриманий по локальним середнім, не несе ніякої інформації про подібність сигналів X і S , рівень результуючого сигналу y_k не є надійним критерієм індикації присутності сигналу S в X_k для більшості нестаціонарних випадків, в яких виникають ненульові і змінні середні. Хоча цих небажаних середніх значень можна позбутися, замінивши S його центрованою версією S' : $s'_k = s_k - S$, що призводить до створення лінійного коваріаційного фільтра, проте проблеми для ряду задач все ж залишаються.

При іншому формулюванні подібності детектор базується на будь-якому способі порівняння векторів S і X_k у просторі сигналів. Один із інтуїтивно задовільних підходів є мінімізація норми різниці векторів $\|X_k - S\|$ у вигляді оцінки модуля чи середньоквадратичного відхилення

$$\sum_{i=0}^{L(s)-1} (x_{k'+i} - s_i)^2.$$

В останньому випадку після усунення константи $\sum s_i^2$ приходимо до оцінки в реальному часі (фільтр евклідової норми показаний на рис. 4.14)

$$y_k = \sum_{i=0}^{L(s)-1} x_{k'+i} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L(s)-1} x_{k'+i}^2 \quad (4.34)$$

Перший доданок в (4.34) представляє собою класичний погоджений фільтр, від якого віднімається залежна від часу сума квадратів вхідного сигналу (другий доданок). Основним недоліком цього фільтра є його чутливість до абсолютних значень X_k .

Структурну схему фільтра евклідової норми наведено на рис.4.15.

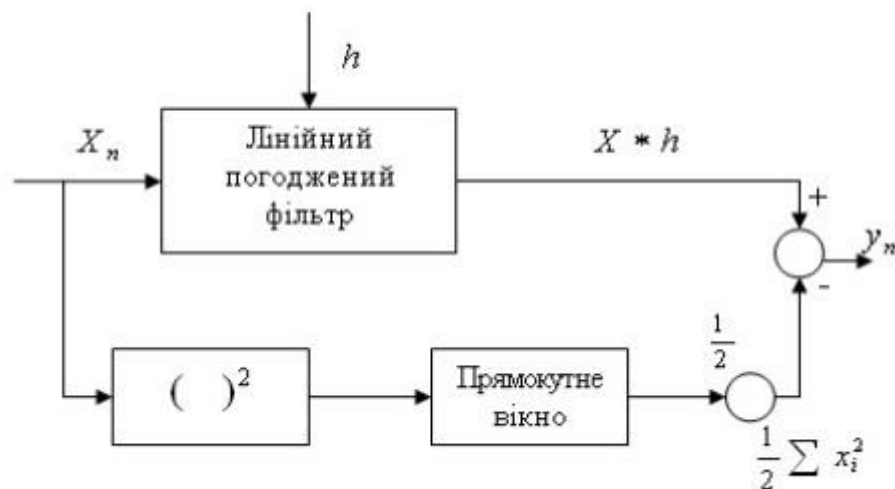


Рис. 4.15.

4.7 Косинусний фільтр

У зв'язку із викладеним вище, кут між векторами X_k і S є, імовірно, більш зручним (для мінімізації) критерієм, оскільки він не залежить від довжини векторів. Заміняючи кут його косинусом $(x_k s) / (\|X_k\| \cdot \|S\|)$ і відкидаючи константу $\|S\|$, отримаємо косинусний детектор (рис. 4.16)

$$y_k = \sum_{i=0}^{L(s)-1} x_{k+i} s_i / \sqrt{\sum_{i=-L(s)+1}^0 x_{k+i}^2}.$$

Кращих результатів можна одержати, центруючи (нормалізуючи) обидва сигнали, оскільки велика різниця кутів між векторами буде для нормалізованих сигналів. Тоді отримаємо нормований косинусний детектор

$$y_k = \sum_{i=0}^{L(s)-1} (x_{k+i} - X_k)(s_i - S) / \sqrt{\sum_{i=-L(s)+1}^0 (x_{k+i} - X_k)^2}.$$

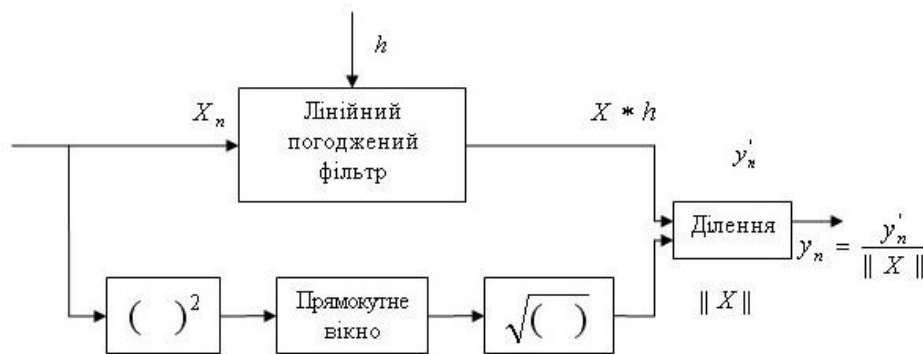


Рис. 4.16.

Були проведені дослідження чутливості відомих фільтрів для одно- та двовірних сигналів. Для цього X -вектор ($L(x) = 512$) змішали з трьома адитивними компонентами: білий Гаусівський шум, пропущений через НЧ фільтр; гармонічний сигнал з заданими параметрами і нахилений сигнал. Результати [10] з середньоквадратичним відхиленням наведені в таблиці 4.5.

Таблиця 4.5.

Тип фільтра	Середнє значення похибки
Класичний погоджений фільтр	81%
Коваріаційний фільтр	52%
Евклідовий фільтр	10%
Косинусний детектор	0,5%
Нормований косинусний детектор	15%

Детектування вважається успішним, якщо обчислене значення виявлялось максимальним серед послідовності значень Y . Якщо використовувати простий пороговий критерій (без пам'яті), то косинусний детектор буде менш ефективним, оскільки максимум буде, хоча а більш надійним, проте значно менш вираженим, ніж в інших детекторах.

Косинусний фільтр у розглянутих випадках був значно кращим за решту. Його середньоквадратична похибка складає порядку 1%, в той час, як інші детектори дають похибку по крайній мірі на порядок більшу.

Проведені експерименти по фільтрації одновимірних змінних у часі сигналів та двовимірних зображень дають широкий матеріал для статистичного аналізу достовірності (надійності) окремих фільтрів як детекторів подібності. Результати для одновимірних сигналів і доповнені експериментами для двовимірних фільтрів вже для зображень, полягають в тому, що при визначенні абсолютного максимуму виходу детектора в достатньо широкому вікні найбільш надійними є кутовий детектор спільно з евклідовим і косинусним детектором. А в загальному випадку найгіршим є коваріаційний детектор. Класичний лінійний погоджений фільтр (кореляційний детектор) є взагалі завжди найгіршим, за винятком дуже спеціальних випадків (широкосмуговий сигнал, адитивний білий шум з нульовим середнім), а ці умови не виконуються при дослідженні подібності структури у випадку аналізу зображень.

4.8 Порівняння лінійної погодженої фільтрації та нормальної фільтрації

Класичний погоджений лінійний фільтр, має імпульсну характеристику

$$h(t) = a \cdot s(t_0 - t),$$

де t_0 – час спостереження (не менший довжини сигналу $s(t)$ в часі).

Сигнал $y(t)$ на виході такого фільтра має вигляд кореляційної функції вхідного сигналу

$$y(t) = a \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) s(t - t_0 + \tau) d\tau.$$

Трансформанта x_{ξ_1} спектра (4.32) нормального перетворення завжди обчислюється як

$$x_{\xi_1} = \left(\sum_{i=1}^N s_i \cdot x_i \right) / \left(\sum_{i=1}^N s_i^2 \right)^{1/2}, \quad (4.35)$$

де x_i , s_i – дискретні відліки досліджуваного та еталонного сигналу відповідно.

Максимум такої кореляційної функції для дискретного еталонного сигналу \bar{S} має вигляд

$$y(t_0) = \sum_{i=1}^N s_i^2. \quad (4.36a)$$

При цьому амплітуда першої трансформанти (4.35) нормального перетворення еталонного сигналу в момент спостереження t_0 має вигляд

$$x_{\xi_1} = (\sum_{i=1}^N s_i^2) / (\sum_{i=1}^N s_i^2)^{1/2} \quad (4.36б)$$

Тобто, при реєстрації відомого сигналу нормальний погоджений фільтр працює (для першої трансформанти) так само, як лінійний погоджений фільтр.

З порівняння (4.36а) і (4.36б) видно, що перша трансформанта нормального перетворення співпадає з максимальним значення автокореляційної функції еталонного сигналу. Нормування x_{ξ_1} діючим значенням в (4.36б) є необхідною умовою при створенні матричного оператора дискретного ортогонального перетворення. За наявності адитивного шуму його значення в (4.36б) ділитимуться на той же знаменник, що свідчить про повний збіг формул (4.36а) і (4.36б).

Отже, можна розглядати часову залежність досліджуваного сигналу у вікні значень першої (або будь-якої i -ої за номером) трансформанти дискретного ортогонального перетворення, яка співпадає з тестовим сигналом, тоді нормальний фільтр можна використовувати як фільтр класичний лінійний погоджений. В такому випадку i -та трансформанта k -го спектру ненормованого перетворення дорівнює значенню k -го відліка сигналу на виході лінійного погодженого фільтра. Але у випадку нормальної фільтрації можна використовувати додаткову інформацію про спотворення досліджуваного сигналу, яку несуть інші складові спектру.

В теорії погодженої лінійної фільтрації для оцінки впливу адитивного шуму використовують перетворення Вінера-Хінчина, тобто пряме перетворення Фур'є для обчислення за кореляційною функцією шуму його спектру потужності і зворотне для переходу від спектру потужності до кореляційної функції.

Так, в дискретному представленні стовпець спектру потужності $\bar{P}_{ш}$ шуму

$$\bar{P}_{ш} = \bar{\bar{F}}_n \cdot \bar{R}_\tau,$$

де \bar{R}_τ – стовпець дискретних відліків кореляційної функції; $\bar{\bar{F}}_n$ – матричний дискретний оператор прямого перетворення Фур'є, нормований множителем $1/\sqrt{N}$; N – формат перетворення.

Відомо, що дискретний матричний оператор $\bar{\bar{F}}_n$ можна утворити добутком двох матриць (кратні перетворення)

$$\overline{\overline{F}}_n = \overline{\overline{P}}_F \cdot \overline{\overline{W}}_{\Sigma N}, \quad (4.37)$$

де $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N}$ – матричний оператор дискретного нормального перетворення; $\overline{\overline{P}}_F$ – матричний дискретний оператор відповідного до даного нормального кратного перетворення.

Тоді за нормальним перетворенням отримаємо спектр $\overline{\rho}_N$ потужностей шуму нормального перетворення

$$\overline{\rho}_N = \overline{\overline{W}}_{\Sigma N} \cdot \overline{R}_\tau, \quad (4.38)$$

з якого у подальшому можна знайти спектр потужностей за Вінером-Хінчином

$$\overline{\rho}_{uu} = \overline{\overline{P}}_F \cdot \overline{\rho}_N. \quad (4.39)$$

Матричний оператор кратного перетворення легко знайти з виразу (4.37), тобто

$$\overline{\overline{P}}_F = \overline{\overline{F}}_n \cdot \overline{\overline{W}}_{\Sigma N}^{-1} = \overline{\overline{F}}_n \cdot \overline{\overline{W}}_{\Sigma N}^T,$$

де T – знак транспонування.

Оскільки зворотне перетворення Фур'є

$$\overline{\overline{F}}_n^{*T} = \overline{\overline{W}}_{\Sigma N}^T \cdot \overline{\overline{P}}_F^{*T},$$

то за спектром потужності шуму (якщо його усереднені параметри задані в області перетворення Фур'є), можна знайти нормальний спектр потужності

$$\overline{\rho}_N = \overline{\overline{P}}_F^{*T} \cdot \overline{\rho}_{uu}. \quad (4.40)$$

Особливістю використання лінійного погодженого фільтра є його застосування для реєстрації відомих сигналів штучного походження, які можна подовжувати у часі з тим, щоб енергія сигналу на його виході в момент спостереження значно перевищувала енергію шуму. Для погодженого фільтра із зростанням часового інтервалу вхідного сигналу (за рахунок повторень початкового еталона) енергія зростає пропорційно квадрату кількості повторень, в той час, як енергія білого шуму зростає за лінійним законом (4.366).

Відмінність полягає в цільовому призначенні нормального (багатоканального) і погодженого (одноканального) фільтрів. Нормальний фільтр визначає відстань між еталонним і досліджуваним сигналами, тоді як узгоджений фільтр реєструє сигнал, подібний до еталонного і замаскований шумом.

Як відомо, погоджений фільтр міняє фази гармонік, з тим, щоб у момент спостереження t_0 вони усі склалися з фазою, рівною нулю. Це

дозволяє (збільшуючи тривалість і тим самим – енергію замаскованого шумом сигналу) забезпечувати значне перевищення піку кореляційною функцією над реалізацією шуму. Ясно, що подібну властивість можна спожити, в основному, при реєстрації сигналів ("образів") штучного походження, тобто таких, форму і енергію яких можна задавати заздалегідь. Крім того, класичний погоджений фільтр не дозволяє реєструвати сигнали заданої форми в послідовності інших детермінованих сигналів, якщо їх енергія у вікні, відповідному тривалості еталонного (шуканого) сигналу, перевищує енергію сигналу, подібного до еталонного. Нормальна фільтрація дозволяє в пачці детермінованих сигналів як зареєструвати наявність сигналу, близького до еталонного, так і визначити міру подібності (відмінності).

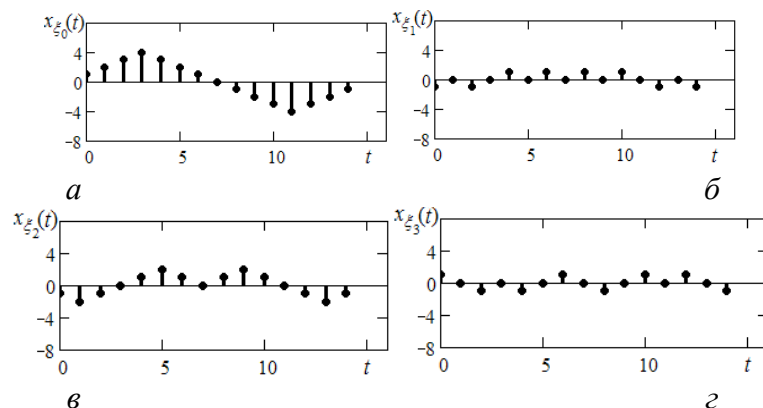
Результатом роботи нормального фільтру є спектр нормального еталонному сигналу дискретного ортогонального перетворення, а погодженого фільтру – функція часу, пік якої може перевищувати (чи не перевищувати) рівень адитивного шуму.

Розглянемо приклади для наочності порівняння результатів класичної лінійної та нормальної погодженої фільтрації, вибрані, виходячи з простоти ілюстрації та перевірки отриманих результатів.

Приклад 1. Нехай тестовий сигнал має вигляд четвертої трансформанти перетворення Адамара $Had(4, t)$ формату $N = 8$. Тоді матричний оператор нормального перетворення для тестового сигналу співпадає з матричним оператором дискретного перетворення Адамара

$$(\overline{\overline{W}}_{\Sigma N1} = \overline{\overline{Had}}_8) \text{ восьмого порядку.}$$

Нехай тепер вікно, яке посувається вздовж осі часу має формат $M = 8$. Тоді миттєві значення $x_{\xi_i}(t)$ згортки лінійного погодженого фільтра з імпульсною характеристикою $h(t) = Had(4, t_0 - t)$ з сигналами, що відповідають трансформантам перетворення Адамара, матимуть (для кожного i -го каналу i -ї трансформанти матриці $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N1}$) вигляд рис. 4.17.



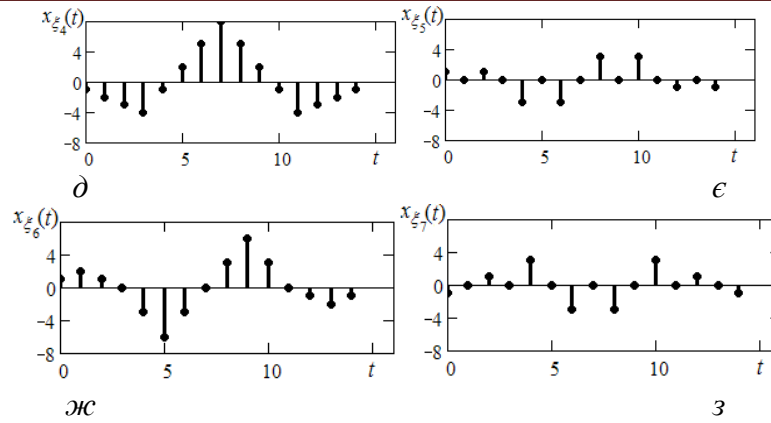
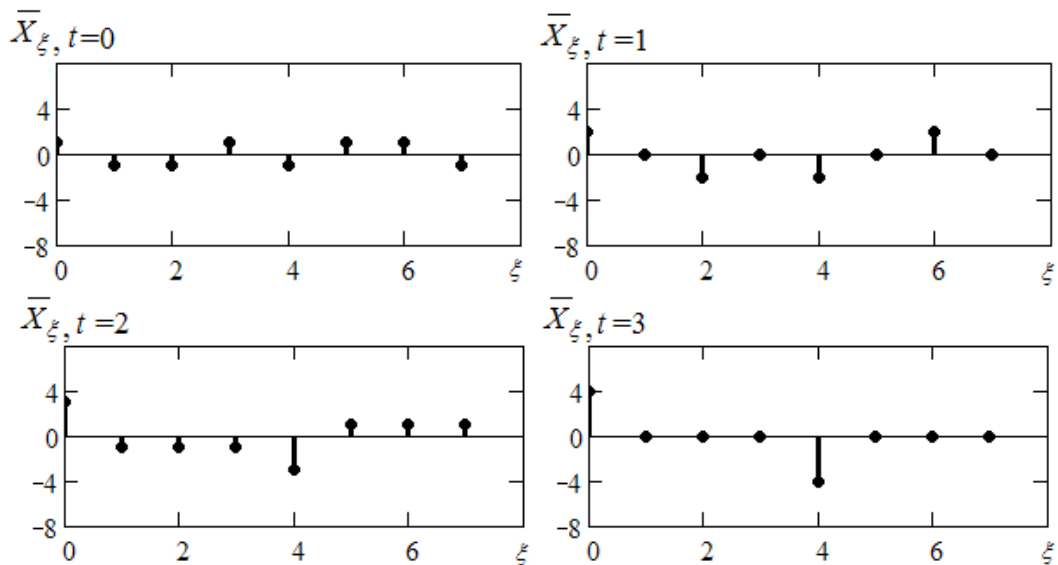


Рис. 4.17.

З рис. 4.27, ∂ видно, що в момент спостереження ($t_0 = 7$) миттєве значення відгуку четвертого каналу (погодженого лінійного фільтра) дорівнюватиме $x_{\xi_4}(t_0) = 8$ і є найбільшим для усіх сигналів (каналів). Якщо тепер взяти два сигнали $Had(4, t)$, то погоджений з таким сигналом фільтр формату $N = 16$ буде мати імпульсну характеристику $Had(4, t_0 - t)$ з матриці $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N 2} = \overline{\overline{Had}}_{16}$, де $t_0 = 15$.

Ясно, що в цьому випадку максимальне значення $Had(4, 15) = 16$. При розрахунках для простоти нормуючий множник $1/\sqrt{N}$ не враховується, оскільки при його врахуванні амплітуда максимуму становитиме \sqrt{N} , в той час як енергія білого шуму буде зменшуватися в \sqrt{N} разів (в залежності від формату N), тому на співвідношення сигнал/шум нормування не впливає.

Миттєві спектри (для моментів часу $t = 0, \dots, 14$) сигналу $Had(4, t)$ для матриці $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N}$ восьмого формату наведено на рис. 4.28.



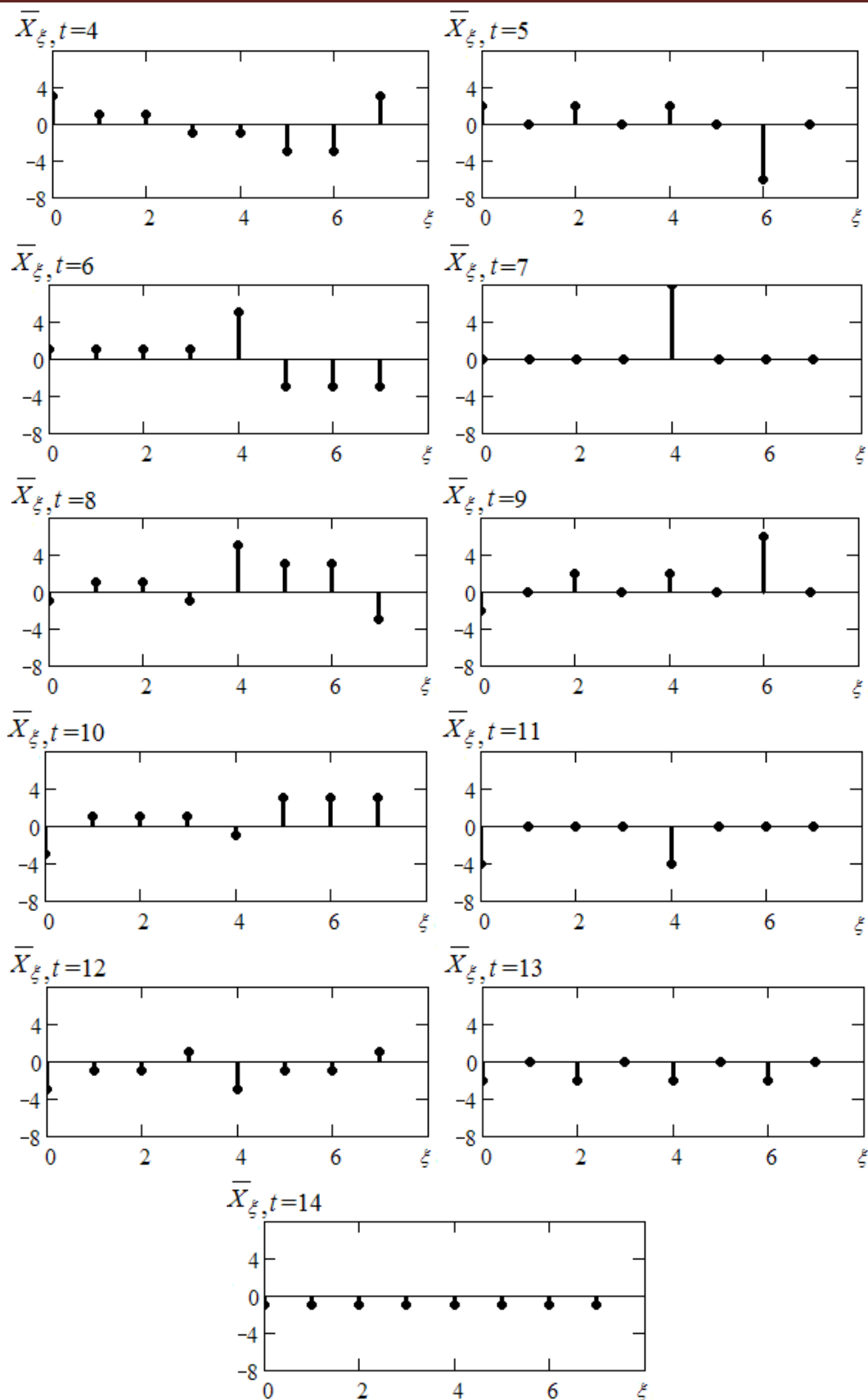


Рис. 4.28.

На рис. 4.29 наведена спектрограма оброблення сигналу у вікні формату $M = 8$.

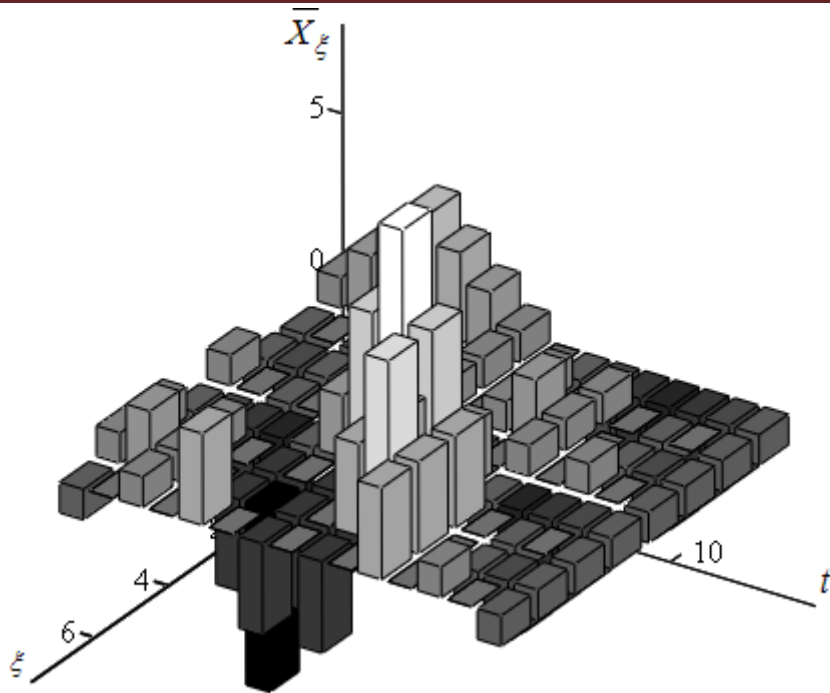


Рис. 4.29.

Спектрограма ілюструє зв'язок між спектральними представленнями в базисі нормального перетворення (вздовж осі ξ) і часовим відгуком (вздовж осі t) пачки сигналів, якими є трансформанти перетворення Адамара, на виході фільтра, погодженого з четвертою трансформантою.

Приклад 2. Нехай шуканий графоелемент представляє собою дискретний сигнал \bar{S} ($N = 32$), що зображений на рис. 4.30 а.

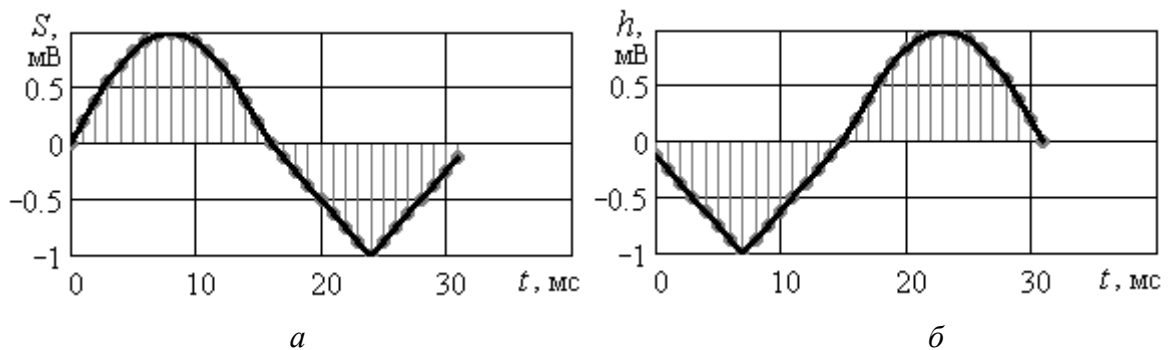
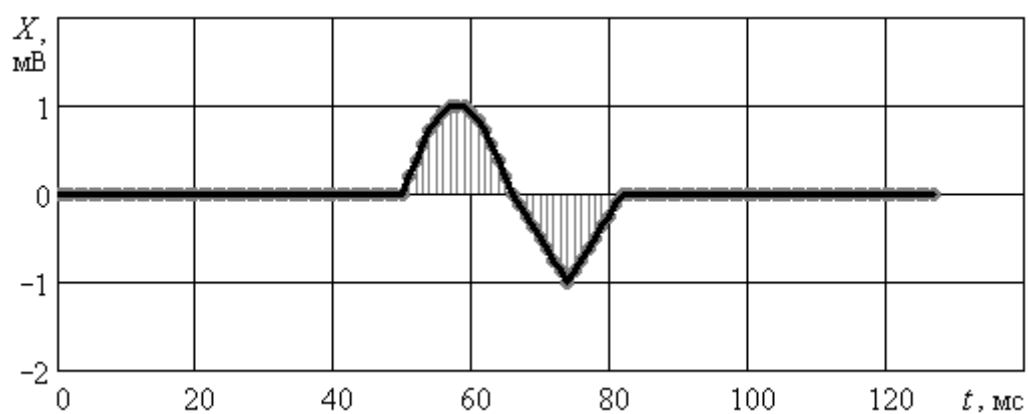


Рис. 4.30.

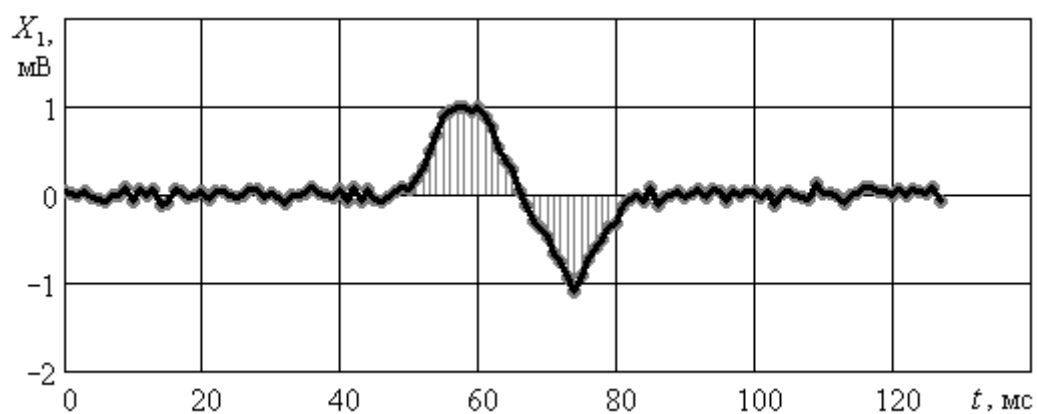
Шуканий графоелемент сигналу (а) та імпульсна характеристика лінійного погодженого фільтру (б).

Імпульсна характеристика $h(t)$ погодженого із заданим дискретним сигналом фільтра, знайдена за формулою (4.30), представлена на рис. 4.31 б.

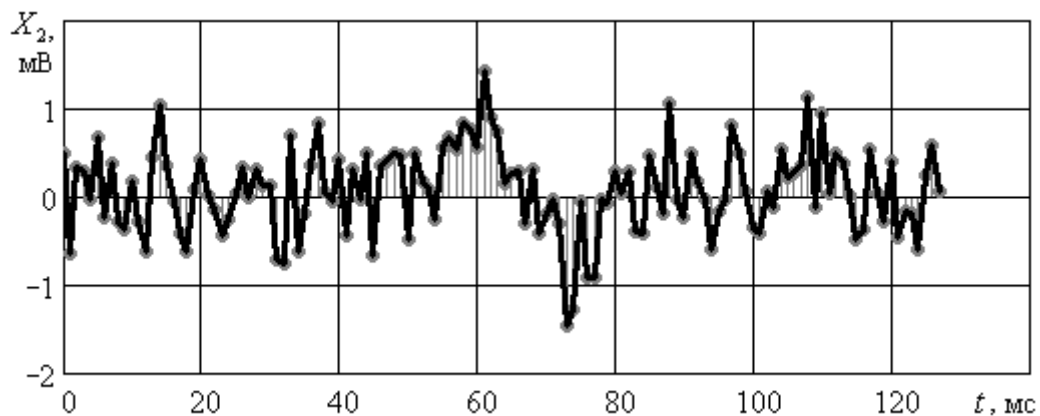
На вхід подається сигнал, що містить шуканий графоелемент, спотворений адитивним білим Гаусовим шумом при різних значеннях дисперсії шуму: $\sigma = 0$ В (рис. 4.31 а), $\sigma_1 = 0,05$ В (рис. 4.31 б) та $\sigma_2 = 0,5$ В (рис. 4.31 в).



a



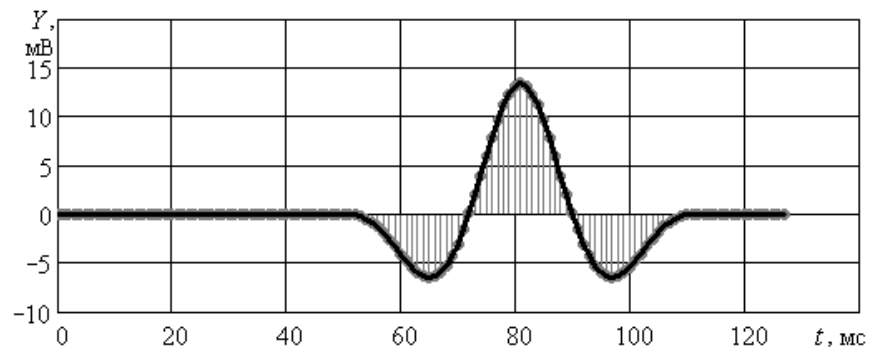
б



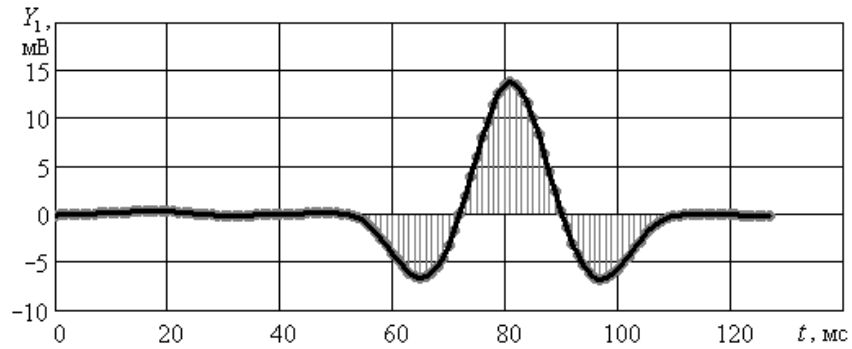
в

Рис. 4.31.

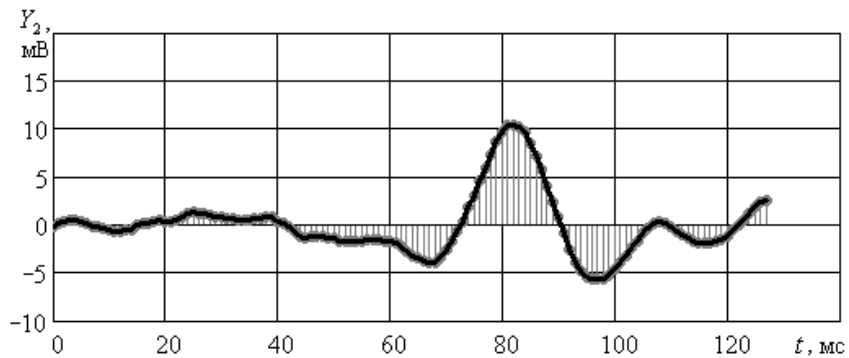
Відповідні сигнали на виході лінійного погодженого фільтра для трьох випадків вхідного сигналу при різних значеннях дисперсії шуму вхідного сигналу $\sigma = 0$ В (а), $\sigma_1 = 0,05$ В (б) та $\sigma_2 = 0,5$ В (в). (рис. 4.31 а – в) зображені на рис. 4.32 а – в.



a



б



в

Рис. 4.32.

У перших двох випадках (рис. 4.32 а, б) максимум сигналу на виході лінійного погодженого фільтру приходить на 81-й часовий відлік, що співпадає з останнім відліком шуканого графоелементу у вхідному сигналі, тоді як у випадку рис. 4.32 в максимум зміщується до 82-го відліку.

При застосуванні нормальної фільтрації для вхідного сигналу рис. 4.31 а – в був побудований нормальний фільтр для шуканого графоелементу \bar{S} (рис. 4.30 а) та знайдений розподіл коефіцієнтів гостроти .

Результат нормальної фільтрації при різних значеннях дисперсії шуму вхідного сигналу (рис. 3.32) $\sigma = 0$ В (а), $\sigma_1 = 0,05$ В (б) та $\sigma_2 = 0,5$ В (в) наведено на рис. 4.33 а – в.

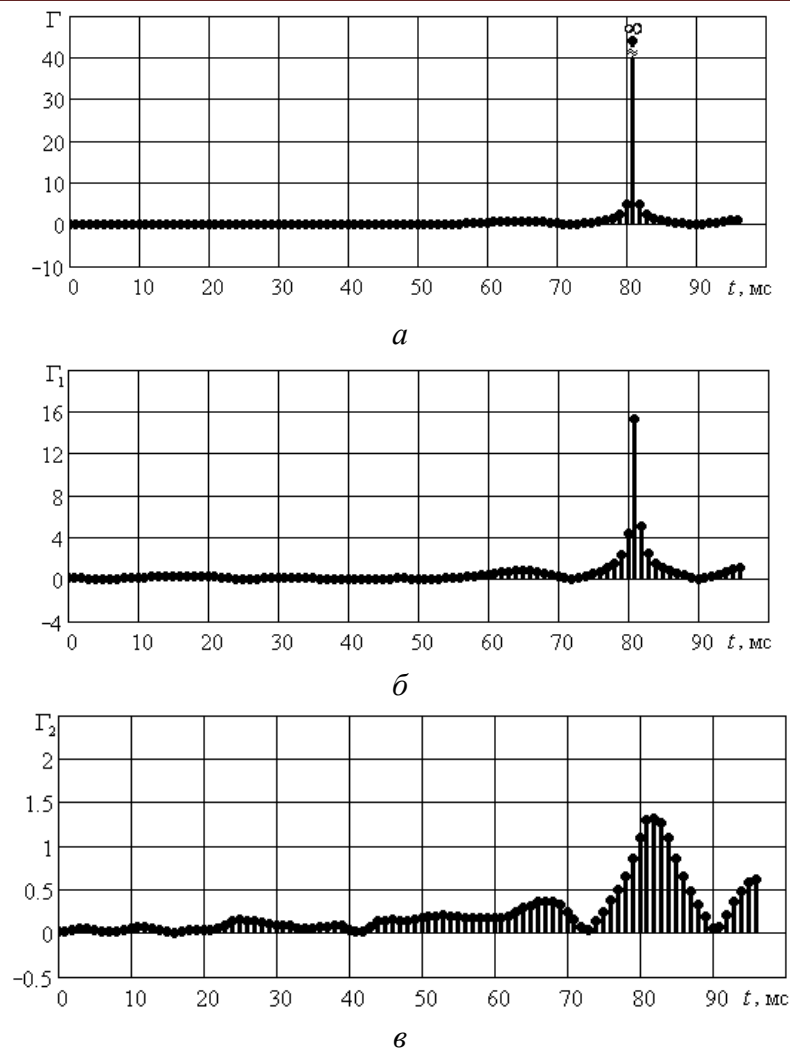


Рис. 4.33.

Як і у випадку застосування лінійної погодженої фільтрації, для результатів нормальної фільтрації максимум коефіцієнту гостроти має 81-ий номер відліку на рис. 4.33 а, б, і зміщується до 82-го на рис. 4.33 в.

При застосуванні обох методів фільтрації зростання рівня шуму призводить до зменшення відмін максимального значення результату фільтрації від інших випадкових піків.

Слід зауважити, що коефіцієнт гостроти є більш чутливим параметром, ніж сигнал на виході лінійного узгодженого фільтра, тому що нормальна фільтрація є принципово нелінійною операцією.

Якщо досліджувані сигнали не є природними (натуральними, тобто такими, форму яких ми довільно не можемо змінювати – наприклад біосигнали людського організму), а штучними (наприклад для таємного обміну паролями “свій” – “чужий”), то надійність реєстрації тестового сигналу можна підвищити, збільшуючи його енергію збільшенням довжини такого сигналу у часі.

Але на жаль, шукані графоеlementи реакцій технічних та біомедичних систем мають натуральне походження і природну форму, що не дозволяє застосувати підхід підвищення енергії.

Приклад 3. В практиці погодженої класифікації ситуація стає більш складною, якщо врахувати той факт, що шуканий сигнал знаходять не тільки на фоні шуму (відношення сигнал/шум звичайно є значно більшим, ніж у випадку прихованого оцінювання „свій” – „чужий”), але й в пачці інших детермінованих сигналів, миттєві значення яких можуть бути значно більшими, ніж миттєві значення шуканого сигналу.

Тому розглянемо інший випадок, коли в послідовності, яка оброблюється, крім “корисного” сигналу присутня завада у вигляді детермінованого сигналу з більшою енергією, форма якого відрізняється від еталону (“корисного” сигналу). В даному випадку еталонний сигнал має вигляд рис 4.30а, а сигнал, який оброблюється має вигляд рис. 4.34. Знайдемо результат фільтрації такої послідовності для випадку, коли вхідний сигнал не спотворений шумом.

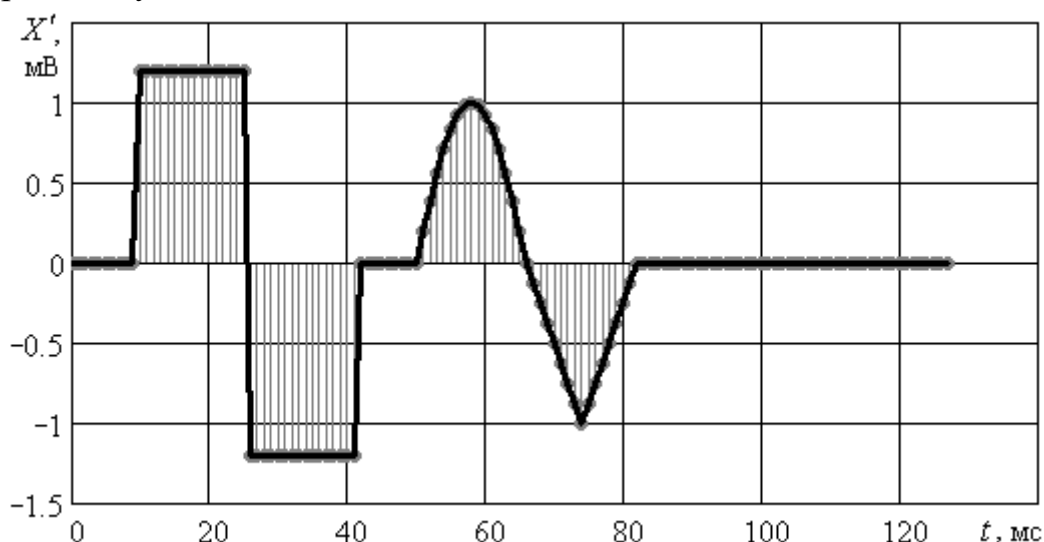


Рис. 4.34.

Результат погодженої фільтрації сигналу рис. 4.34 наведений на рис. 4.35, а результат нормальної фільтрації – на рис. 4.36.

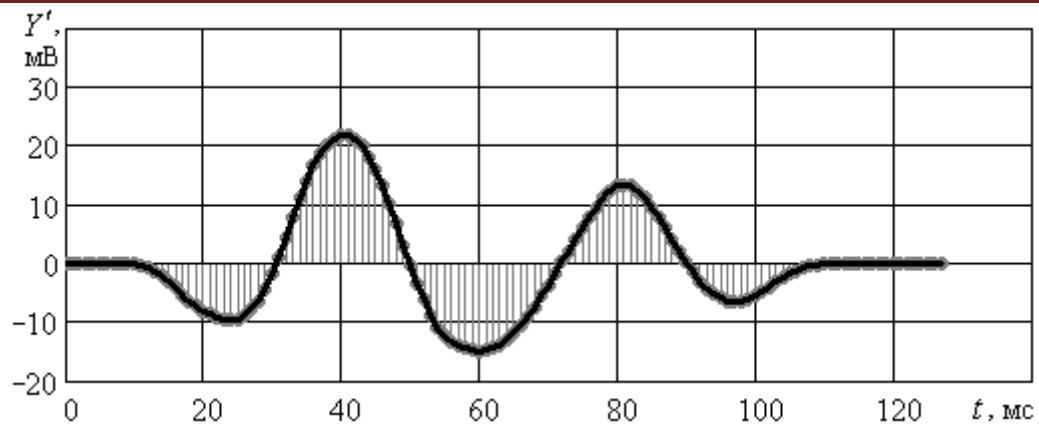


Рис. 4.35.

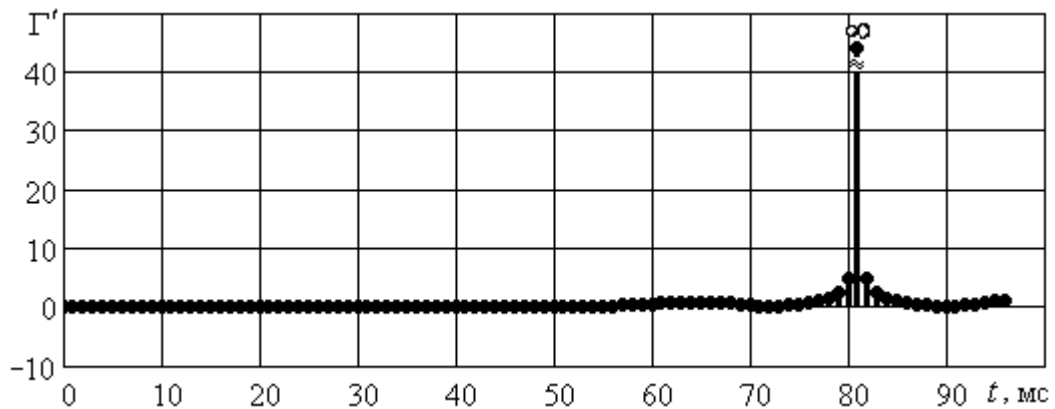


Рис. 4.36.

З рис. 4.34 видно, що результат згортки імпульсної характеристики з завадою (детермінованим сигналом, який відрізняється від еталону) є більшим в порівнянні з результатом згортки імпульсної характеристики фільтра і “корисного” сигналу. Таким чином, наявність детермінованих сигналів (відмінних за формою від еталону) в послідовності, яка оброблюється, може зробити неможливим прийняття правильного рішення про наявність фрагменту, який шукається, в послідовності, яка оброблюється. В даному випадку ми можемо зробити помилковий висновок про наявність двох шуканих фрагментів в вхідній послідовності. Тобто погоджена фільтрація може “не працювати” у випадку наявності детермінованих завад. Тоді як нормальна фільтрація в разі наявності детермінованої завади з більшою енергією дає вірний результат (рис. 4.36).

4.9 Висновки

1. Розглянуто різні типи погоджених фільтрів, критерії їх побудови та проведено порівняння результатів класичної лінійної та нормальної погодженої фільтрації.
2. Показано, що нормалізовані фільтри мають ряд недоліків, яких позбавлений нормальний фільтр.
3. Нормальний фільтр дозволяє чисельно оцінювати ступінь

подібності/розбіжності (за допомогою коефіцієнта трансформант та гостроти) між досліджуваним сигналом та сигналом еталонним, що є основним етапом при класифікації (розпізнаванні сигналів).

4. Нормальний фільтр є нелінійним.

5. Класичний лінійний погоджений фільтр, так само як і нормальний фільтр, дозволяє реєструвати наявність (або відсутність) сигналу, близького до еталонного в адитивній суміші з шумом. Але, на відміну від нормального, не дозволяє дати чисельну оцінку ступеня подібності/розбіжності замаскованого шумом сигналу до еталону.

6. На відміну від нормального, класичний погоджений фільтр не дозволяє розпізнавати близького до еталонного сигналу і оцінювати ступінь його подібності/розбіжності в послідовності детермінованих сигналів, тобто не може бути використаним для розв'язання задач класифікації (в тих випадках, коли миттєві значення детермінованих сигналів в пачці значно перевищують значення шуканого сигналу).

7. Між нормальним і класичним погодженим фільтром існує жорсткий зв'язок. Нормальний фільтр містить в одному зі своїх каналів (трансформанті матричного оператора дискретного ортогонального нормального перетворення) імпульсну характеристику погодженого фільтра. Відгук цього каналу відповідає значенню реакції погодженого фільтра в момент спостереження.

8. Нормальний та класичний лінійні фільтри інформаційно доповнюють один одного, хоча й призначені для розв'язання різних радіотехнічних задач.

РОЗДІЛ 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ. РІЗНИЦЕВІ ТА СПЕКТРАЛЬНІ МЕТОДИ

5.1 Вступні зауваження

Моделлю будь-якої системи штучного або натурального походження є система диференціальних рівнянь динамічної рівноваги цієї системи.

Системи можна поділити на два великих класи:

а) **стохастичні** (з випадковими сигналами та (або) випадковою структурою);

б) **детерміновані** (з детермінованою структурою, з детермінованими та (або) випадковими параметрами і сигналами).

У подальшому будемо розглядати системи детерміновані, в яких сигнали мають, в загальному випадку, випадковий характер (наприклад, детермінований сигнал та шум), а параметри системи можуть змінюватися випадковим чином (від однієї реалізації системи до іншої) в межах полів допусків.

Детерміновані системи описують системами диференціальних рівнянь динамічної рівноваги, які умовно поділяють на чотири основні класи:

а) **нелінійні**, в яких хоча один з коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь N -го порядку динамічної рівноваги a_i є функцією (хоча б однієї) реакції x_i або дії $f_k(t)$

$$a_m(x_i, f_k) \cdot d^m x_1(t)/dt^m + a_{m-1}(x_i, f_k) \cdot d^{m-1} x_1(t)/dt^{m-1} + \dots + a_1(x_i, f_k) \cdot dx_1/dt + a_0(x_i, f_k) \cdot x_1(t) = f_1(t);$$

(5.1)

$$a_m(x_i, f_k) \cdot d^m x_N(t)/dt^m + a_{m-1}(x_i, f_k) \cdot d^{m-1} x_N(t)/dt^{m-1} + \dots + a_1(x_i, f_k) \cdot dx_N/dt + a_0(x_i, f_k) \cdot x_N(t) = f_N(t);$$

де m – порядок диференціального рівняння; $x_d(t)$ – шукана реакція; $f_k(t)$ – зовнішня дія у вигляді функції часу або іншої натуральної координати;

б) **нелінійні параметричні рівняння**, в яких хоча б один коефіцієнт є функцією дії або реакції та незалежної зовнішньої дії, яка є функцією часу, і вплив якої на параметр системи можна врахувати як зміну цього параметру у часі. Тобто коефіцієнти диференціальних рівнянь є також явними функціями часу

$$a_m(x_i, f_k, t) \times d^m x_1(t)/dt^m + a_{m-1}(x_i, f_k, t) \times d^{m-1} x_1(t)/dt^{m-1} + \dots + a_1(x_i, f_k, t) \times dx_1/dt + a_0(x_i, f_k, t) \times x_1(t) = f_1(t);$$

(5.2)

$$a_m(x_i, f_k, t) \cdot d^m x_N(t)/dt^m + a_{m-1}(x_i, f_k, t) \cdot d^{m-1} x_N(t)/dt^{m-1} + \dots + a_1(x_i, f_k, t) \cdot dx_N/dt + a_0(x_i, f_k, t) \cdot x_N(t) = f_N(t);$$

в) **лінійні параметричні диференційні рівняння**, в яких вплив незалежної дії, яка не є реакцією x_i або дією $f_k(t)$, враховується як функція хоча б одного параметру від часу (або іншої натуральної координати)

$$a_m(t) \cdot d^m x_1(t)/dt^m + a_{m-1}(t) \cdot d^{m-1} x_1(t)/dt^{m-1} + \dots + a_1(t) \cdot dx_1/dt + a_0(t) \cdot x_1(t) = f_1(t);$$

.....

$$a_m(t) \cdot d^m x_N(t)/dt^m + a_{m-1}(t) \cdot d^{m-1} x_N(t)/dt^{m-1} + \dots + a_1(t) \cdot dx_N/dt + a_0(t) \cdot x_N(t) = f_N(t); \quad (5.3)$$

Для лінійних параметричних систем справедливий принцип суперпозиції, хоча реакція на дію у вигляді гармоніки або експоненти невідома заздалегідь;

г) **лінійні диференційні рівняння** (з постійними коефіцієнтами), для яких коефіцієнти рівнянь не залежать від дії та (або) реакції

$$a_m \cdot d^m x_1(t)/dt^m + a_{m-1} \cdot d^{m-1} x_1(t)/dt^{m-1} + \dots + a_1 \cdot dx_1/dt + a_0 \cdot x_1(t) = f_1(t);$$

..... (5.4)

$$a_m \cdot d^m x_N(t)/dt^m + a_{m-1} \cdot d^{m-1} x_N(t)/dt^{m-1} + \dots + a_1 \cdot dx_N/dt + a_0 \cdot x_N(t) = f_N(t).$$

Для лінійних систем справедливий принцип суперпозиції. До того ж реакція такої системи на гармонічну дію частот ω_0 має вигляд гармоніки тієї самої частоти, але іншої амплітуди і початкової фази, а реакція на дію у вигляді експоненти дійсного аргументу дає експоненту, але іншого (дійсного або комплексного) аргументу.

Система є **нелінійною**, якщо хоча б один параметр елемента системи має нелінійну вольт-амперну, фарад-вольтну або вебер-амперну і т.д. характеристику.

Система є **параметричною**, якщо хоча б один з параметрів її компонентів можна представити як функцію часу (при цьому зміни параметру у часі виникають завдяки нелінійній залежності характеристики параметру від такої дії, яка не враховується в системі рівнянь рівноваги як дія або реакція)

Система є **лінійною**, якщо кожен з параметрів компонентів не змінюється і є константою.

У подальшому будемо розглядати розв'язання рівнянь рівноваги лінійних систем, оскільки методи розв'язання, які для цього застосовуються, у подальшому використовуються для наближених розв'язань систем лінійно-параметричних та нелінійних рівнянь.

5.2. Аналіз лінійних систем в області перетворення Фур'є

Найбільш розповсюдженим методом розв'язання лінійних диференційних рівнянь є метод перетворення Фур'є, алгоритм якого полягає в наступному:

1. Для всіх незалежних дій $f_i(t)$ знайти їх перетворення Фур'є $\cdot F_i(j\omega)$
2. Для диференційних рівнянь замінити операції $d^n(\cdot)/dt^n$ на множники $(j\omega)^n$, але не при шуканих реакціях $x_k(t)$, а перед їх образами (теж невідомими) $X_k(j\omega)$. При цьому диференційне рівняння (5.4) зводиться до алгебраїчного

$$[a_m \cdot (j\omega)^m + a_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0] \cdot X_k(j\omega) = F(j\omega). \quad (5.5)$$

Для часткового випадку систем, якими є алгебраїчні кола з керованими джерелами (радіотехнічні кола), процедура одержання коефіцієнтів a_i диференційних рівнянь (5.4), (5.5) спрощується введенням закону Ома для образів Фур'є [].

3. Розв'язанням рівняння (5.5) знайти спектр шуканої реакції $X_k(j\omega)$.

4. Зворотним перетворенням Фур'є по знайденому спектру $X_k(j\omega)$ знайти його оригінал

$$x_k(t) = \mathbf{F}^{-1}\{x_k(j\omega)\}.$$

При аналізі радіотехнічних кіл, як вже з'ясувалося, розроблено більш простий алгоритм пошуку реакцій на довільну дію, який має наступний вигляд.

1. Для всіх дій знайти їх спектри Фур'є. При цьому широко застосовують кусково-лінійну апроксимацію сигналів і знаходять спектри за теоремами про спектри перетворення Фур'є

2. Для елементів R , L , C , для їх образів Фур'є ввести комплексні опори або провідності:

$$R \leftrightarrow R; \quad G \leftrightarrow G; \quad \dot{X}_L \leftrightarrow j\omega L; \quad \dot{b}_L \leftrightarrow \frac{1}{j\omega L}; \quad \dot{X}_C \leftrightarrow \frac{1}{j\omega C}; \quad \dot{b}_C \leftrightarrow j\omega C.$$

3. Для аналізованого кола за образами опорів (провідностей) скласти системи рівнянь рівноваги за методом вузлових напруг (або контурних струмів, що роблять значно рідше)

$\bar{Y}(j\omega) \cdot \bar{U}(j\omega) = \bar{J}(j\omega)$, (5.6) де $\bar{Y}(j\omega)$ – матриця комплексних провідностей системи рівнянь вузлових напруг порядку N ;

$\bar{U}(j\omega), \bar{J}(j\omega)$ – відповідно стовпці спектрів шуканих вузлових напруг-реакцій та струмів незалежних джерел розміру $N \times 1$.

4. Розв'язати рівняння (5.6)

$$\bar{U}(j\omega) = \bar{Y}^{-1}(j\omega) \cdot \bar{J}(j\omega), \quad (5.7)$$

де $\bar{Y}^{-1}(j\omega)$ – обернена матриця.

5. За спектрами $U_i(j\omega)$ знайдених реакцій $\bar{U}(j\omega)$ знайти їх оригінал $u_i(t)$.

Останній пункт алгоритму, тобто знаходження зворотним перетворенням Фур'є спектра кожної шуканої вузлової напруги $U_i(j\omega)$ в аналітичному вигляді становить неабияку складність навіть у випадку відносно простих кіл та сигналів-дій.

Одним із засобів розв'язання задачі зворотного перетворення Фур'є для спектра шуканої реакції є перехід до перетворення Лапласа, в базисі якого зворотне перетворення легко знайти за розкладом по Хевісайду (розкладом на прості дроби дробово-раціональної функції образу реакції), але такий розклад можливий при наявності обмеженої кількості полюсів функцій $U_i(p)$ (функцій кола, які пов'язують реакції $U_i(p)$ з дією $\bar{J}(p)$). Проблема ж пошуку полюсів (нулів полінома знаменника $U_i(p)$ або власних значень або коренів характеристичного рівняння) є так званою «віковою» проблемою, яка задовільно не розв'язана і в наш час.

Тому єдиним можливим способом спрощення задачі обчислення оригіналу реакції $U_i(t)$ за її спектром $U_i(j\omega)$ є зворотне дискретне перетворення Фур'є. Алгоритм аналізу за допомогою дискретного перетворення Фур'є має наступний вигляд.

1. Для всіх дій $X_k(t)$ зробити дискретизацію (замінивши неперервну функцію її дискретними відліками у часі)

2. Для дискретних відліків \bar{x}_{k_t} знайти пряме дискретне перетворення Фур'є.

3. За допомогою будь-якого методу (вузлових напруг, узагальнених чисел і т.д.) знайти аналітичні вирази всіх функцій кола (системи), що пов'язують між собою дії $f_i(t)$ і реакції $x_k(t)$ (в області Фур'є або Лапласа їм відповідають їх образи-спектри $F_i(j\omega)$ і $X_k(j\omega)$) та дискретизувати ці функції частоти $j\omega$.

4. Знайти дискретні спектри шуканих реакцій. Так, наприклад, для кола (систем) у вигляді зображення двобрамника, тобто при єдиній дії на одному вході та єдиній шуканій реакції дискретний спектр реакції.

$$\bar{X}_{k_\omega} = \bar{K}_\omega \cdot \bar{F}_\omega, \quad (5.8)$$

де \bar{X}_{k_ω} – стовпець комплексних амплітуд дискретного спектра шуканої реакції розміру $N \times 1$;

$\overline{\overline{K}}_\omega$ – діагональна матриця комплексних значень функцій кола (системи) на дискретних частотах порядку N ;

$\overline{\overline{F}}_\omega$ – стовпець комплексних амплітуд дискретного спектру дії розміру $N \times 1$.

5. Знайти дискретне зворотне перетворення Фур'є від $\overline{\overline{X}}_{k_\omega}$, тобто $\overline{\overline{X}}_{k_t}$.

Слід зауважити, що таке спрощення процедури аналізу пов'язане із втратою інформації (що присутня при наявності обчислених в перетворенні Лапласа полюсів) про швидкості можливих осциляцій в імпульсній характеристиці системи, врахування яких визначає крок дискретизації у часовій та частотній областях, тобто формат перетворень.

5.3. Розв'язання диференціальних рівнянь в області спектрів дискретних перетворень з дійсним ядром

Як вже з'ясувалось, широкого розповсюдження для обробки сигналів набули перетворення з дійсним ядром, такі, як Уолша-Адамара, косинусне і т. п.

Оскільки алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь базується на теоремі про диференціювання відповідного перетворення, розглянемо, як виглядає ця теорема при диференціюванні в базисі перетворення Адамара.

Для дискретного перетворення Адамара

$$\overline{\overline{H}}(k) = \overline{\overline{H}}ad_H \cdot \overline{\overline{s}}_t; \quad (5.9a)$$

$$\overline{\overline{s}}_t = \overline{\overline{H}}ad_H^T \cdot \overline{\overline{H}}(k), \quad (5.9b)$$

де $\overline{\overline{H}}ad_H$ – нормований матричний дискретний оператор перетворення Адамара порядку N ; $\overline{\overline{H}}(k)$ та $\overline{\overline{s}}_t$ відповідно стовпці амплітуд функцій Адамара та дискретні відліки сигналу в натуральних координатах розміру $N \times 1$; T – знак транспонування.

Після диференціювання (5.9б) отримаємо

$$\overline{\overline{s}}_{dt} = \overline{\overline{D}}_H^T \cdot \overline{\overline{H}}(k), \quad (5.10)$$

де $\overline{\overline{s}}_{dt}$ – вектор-стовпець відліків похідної сигналу $\overline{\overline{s}}_t$ розміру $N \times 1$; $\overline{\overline{D}}_H^T$ – нормована матриця похідних від функцій Адамара.

Підставивши в (5.10) вираз (5.9a) одержимо

$$\overline{\overline{s}}_{dt} = \overline{\overline{D}}_H^T \cdot \overline{\overline{H}}ad_H \cdot \overline{\overline{s}}_t, \quad (5.11a)$$

а підставленням замість $\overline{\overline{s}}_{dt}$ його спектру за (5.9 б)

$$\overline{\overline{H}}_{dt} = \overline{\overline{H}}ad_H \cdot \overline{\overline{s}}_{dt}$$

одержимо

$$\bar{H}_{dt} = \overline{H} \overline{ad}_h \cdot \bar{D}_h^T \cdot \overline{H} \overline{ad}_h \cdot \bar{s}_t, \quad (5.11б)$$

де \bar{H}_{dt} – стовпець амплітуд функцій Адамара для спектра похідної \bar{s}_{dt} .

Таким чином, теорему про диференціювання оригіналу для перетворення Адамара можна записати у наступному вигляді:

якщо $\bar{s}_t \leftrightarrow \bar{H}(k)$, то

$$\bar{s}_{dt} \leftrightarrow \overline{H} \overline{ad}_h \cdot \bar{D}_h^T \cdot \bar{H}(k). \quad (5.12)$$

Тобто операції диференціювання в базисі Адамара відповідає множення на матричний оператор

$$\overline{Dh} = \overline{H} \overline{ad}_h \cdot \bar{D}_h^T. \quad (5.13)$$

Цікаво, що в випадку перед творення Фур'є такий матричний оператор \overline{Dh} має вигляд діагональної матриці, в діагоналі якої записані $j0, j\omega_1, j\omega_2 \dots$

У випадку перетворення Адамара матричний оператор \overline{Dh} має блочно-діагональний вигляд. Причому матриця другого порядку \overline{Dh}_2 має вигляд

$$\overline{Dh}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

В матриці четвертого порядку перший блок діагоналі має вигляд \overline{Deh}_2 , а другий – результат підсумування матриці \overline{Dh}_2 та базової матриці

$$\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{тобто} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно, матриця 8-ого порядку складається з блоку \overline{Dh}_4 та другого блоку, який отримано в результаті підсумування матриці \overline{Dh}_4 і добутку

$$\frac{1}{2} \cdot \bar{B}_2 \otimes \bar{B}_2 = \frac{1}{2} \cdot \bar{B}_4,$$

де знак \otimes означає Кронекерів добуток.

Аналогічно формується матриця 16 порядку, тільки перед добутком $\bar{B}_4 \otimes \bar{B}_4$ стоїть множник $1/4$ (для 32 – $1/8$ і т.д.).

Алгоритм розв'язання задачі аналізу лінійних систем (кіл) в базисі дискретного перетворення Адамара має наступний вигляд.

1. За диференційним рівнянням

$$a_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + a_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + a_0 \cdot x(t) = b_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + b_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + b_0 \cdot s(t). \quad (5.14)$$

Заміною $\frac{d^k x(t)}{dt^k}$ на \bar{H}_{dkt} згідно з (5.11 б) отримати матричне рівняння

$$a_m \times (\overline{Dh})^m \cdot \bar{X}_\xi + \dots + a_1 \cdot (\overline{Dh}) \cdot \bar{X}_\xi + a_0 \cdot \bar{E} \cdot \bar{X}_\xi = b_n \cdot (\overline{Dh})^n \cdot \bar{S}_\xi + \dots + b_1 \cdot (\overline{Dh}) \cdot \bar{S}_\xi + b_0 \cdot \bar{E} \cdot \bar{S}_\xi, \quad (5.15)$$

де $\bar{\bar{E}}$ – одинична матриця; \bar{X}_ξ , \bar{S}_ξ – стовпці амплітуд функцій Адамара реакції та дії відповідно.

Рівняння (5.15) можна переписати у вигляді

$$[a_m \cdot (\bar{Dh})^m + \dots + a_1 \cdot (\bar{Dh}) + a_0 \cdot \bar{E}] \cdot \bar{X}_\xi = [b_n \cdot (\bar{Dh})^n + \dots + b_1 \cdot (\bar{Dh}) + b_0 \cdot \bar{E}] \cdot \bar{S}_\xi. \quad (5.16)$$

Позначивши матриці в прямих дужках як $\bar{\bar{A}}_\xi$ та $\bar{\bar{B}}_\xi$ формулу (5.16) можна записати в скороченому вигляді

$$\bar{\bar{A}}_\xi \cdot \bar{X}_\xi = \bar{\bar{B}}_\xi \cdot \bar{S}_\xi. \quad (5.17)$$

Таким чином, алгоритм аналізу лінійної системи в області перетворення Адамара має наступний вигляд.

1. Знайти розв'язок рівняння (5.17)

$$\bar{X}_\xi = \bar{\bar{A}}_\xi^{-1} \cdot \bar{\bar{B}}_\xi \cdot \bar{S}_\xi.$$

2. Перетворити спектр шуканої реакції \bar{X}_ξ до його оригіналу

$$\bar{x}_t = \overline{\overline{Had}}_n \cdot \bar{X}_\xi.$$

Зручність (або незручність) розв'язання задачі аналізу в базисі перетворення Адамара повністю і точно обернення, блочно-діагональної матриці $\bar{\bar{A}}_\xi$ в (5.17).

Аналогічно, задачу аналізу лінійної системи на базі диференційного рівняння (5.14) можна розв'язати, користуючись іншими дискретними ортогональними перетвореннями $\bar{\bar{W}}$. При цьому добуток матриці $\bar{\bar{W}}$ прямого ортогонального перетворення на матрицю $\bar{\bar{D}}_n^T$ похідних від зворотного перетворення буде мати іншу структуру. Це призведе до інших властивостей обернення результуючої матриці $\bar{\bar{A}}_\xi$ в (5.17) і інших операційних похибок, що відкриває широкий шлях для створення відповідних алгоритмів аналізу проходження сигналів певних класів через лінійні системи.

5.4. Різницеві методи розв'язання лінійних диференційних рівнянь

Запис диференційного рівняння (5.14) з використанням виразу (5.10) приводить його до вигляду

$$[a_m \cdot (\bar{\bar{D}}_n^T \cdot \bar{\bar{W}})^m + \dots + a_1 \cdot (\bar{\bar{D}}_n^T \cdot \bar{\bar{W}})^1 + a_0 \cdot \bar{E}] \cdot \bar{x}_t = [b_n \cdot (\bar{\bar{D}}_n^T \cdot \bar{\bar{W}})^n + \dots + b_1 \cdot (\bar{\bar{D}}_n^T \cdot \bar{\bar{W}}) + b_0 \cdot \bar{E}] \cdot \bar{s}_t, \quad (5.18)$$

де $\bar{\bar{W}}$ – матричний дискретний оператор довільного ортогонального перетворення.

Цікавим є те, що добуток $\bar{\beta}_1 = \bar{\bar{D}}_n^T \cdot \bar{\bar{W}}$ для будь-якого перетворення дає однаковий результат, якщо похідні обчислюється як поділена різниця значень двох відліків (мінімальна різницева формула). При цьому, в головній діагоналі матриці $\bar{\beta}_1$ четвертого порядку має вигляд

$$\bar{\bar{\beta}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.19a)$$

Квадрат дії матриці

$\bar{\bar{\beta}}_2 = \bar{\bar{\beta}}_1 \cdot \bar{\bar{\beta}}_1$ має вигляд (для формату матриці $N=8$)

$$\bar{\bar{\beta}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.19b)$$

Аналогічно, матриця

$$\bar{\bar{\beta}}_3 = \bar{\bar{\beta}}_1 \cdot \bar{\bar{\beta}}_1 \cdot \bar{\bar{\beta}}_1 \quad (5.20a)$$

є дискретним оператором згортки з коефіцієнтами $\bar{\bar{\beta}}_1, \bar{\bar{\beta}}_3, \bar{\bar{\beta}}_5$ і т.д.

Тобто для матриці $\bar{\bar{\beta}}_n = (\bar{\bar{\beta}}_1)^n$ коефіцієнти відповідного оператора згортки дорівнюватимуть факторіальним коефіцієнтам бінома $(b - a)^n$.

Матричний запис рівняння (5.18) з урахуванням (5.19) є записом різницевого рівняння.

Позначивши

$$\bar{\bar{\alpha}}_\Sigma = a_m \cdot \bar{\bar{\beta}}_m + a_{m-1} \cdot \bar{\bar{\beta}}_{m-1} + \dots + a_1 \cdot \bar{\bar{\beta}}_1 + a_0 \cdot \bar{\bar{E}} \quad (5.20a)$$

та

$$\bar{\bar{\beta}}_\Sigma = b_n \cdot \bar{\bar{\beta}}_n + b_{n-1} \cdot \bar{\bar{\beta}}_{n-1} + \dots + b_1 \cdot \bar{\bar{\beta}}_1 + b_0 \cdot \bar{\bar{E}} \quad (5.20b)$$

отримаємо матричне різницеве рівняння

$$\bar{\bar{\alpha}}_\Sigma \cdot \bar{\bar{x}}_t = \bar{\bar{\beta}}_\Sigma \cdot \bar{\bar{s}}_t, \quad (5.21a)$$

Звідки

$$\bar{\bar{x}}_t = \bar{\bar{\alpha}}_\Sigma^{-1} \cdot \bar{\bar{\beta}}_\Sigma \cdot \bar{\bar{s}}_t. \quad (5.21b)$$

Якщо збільшувати формат N матриць $\bar{\bar{\alpha}}_\Sigma, \bar{\bar{\beta}}_\Sigma$ таким чином, що $N \rightarrow \infty$, тоді в формулах (5.19) можна не враховувати верхній трикутник ненульових коефіцієнтів і матриці $\bar{\bar{\alpha}}_\Sigma, \bar{\bar{\beta}}_\Sigma$ стають нижньотрикутниковими. Для таких матриць розв'язання системи рівнянь (5.21) значно спрощується. Покажемо це. Знайдемо добуток

$$\bar{\bar{\beta}}_\Sigma \cdot \bar{\bar{s}}_t = \bar{\bar{S}}_\beta. \quad (5.22)$$

Тоді в розгорнутому вигляді (5.21a) з урахуванням (5.19) має вигляд

$$\begin{bmatrix} S_{\beta 1} \\ S_{\beta 2} \\ S_{\beta 3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{\Sigma 11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{\Sigma 21} & \beta_{\Sigma 22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{\Sigma 31} & \beta_{\Sigma 32} & \beta_{\Sigma 33} & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{\Sigma 41} & \beta_{\Sigma 42} & \beta_{\Sigma 43} & \beta_{E 44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{t_1} \\ S_{t_2} \\ S_{t_3} \\ S_{t_4} \\ \vdots \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_{t_1} \\ x_{t_2} \\ x_{t_3} \\ x_{t_4} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{\Sigma 11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{\Sigma 21} & \gamma_{\Sigma 22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{\Sigma 31} & \gamma_{\Sigma 32} & \gamma_{\Sigma 33} & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{\Sigma 41} & \gamma_{\Sigma 42} & \gamma_{\Sigma 43} & \gamma_{E 44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{\beta 1} \\ S_{\beta 2} \\ S_{\beta 3} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

де $\gamma_{\Sigma ij}$ – елементи матриці $\bar{\gamma}_{\Sigma} = \bar{\alpha}_{\Sigma}^{-1}$.

5.5. Оператор диференціювання в області трансформант перетворення Уолша-Адамара при природному впорядкуванні базисних функцій

Теорема про диференціювання для оригіналу та зображення в області трансформант Уолша-Адамара:

якщо

$$\bar{X}_t \Leftrightarrow \bar{X}_{\xi}, \quad (5.23)$$

то

$$\bar{X}_d \Leftrightarrow \bar{\bar{W}} \cdot \bar{\bar{D}}_N \cdot \bar{\bar{X}}_{\xi}, \quad (5.24)$$

де \bar{X}_d – вектор-стовпець дискретних відліків похідної послідовності \bar{X}_t ;

\bar{X}_t – вектор-стовпець амплітуд трансформант ПУА послідовності \bar{X}_t ;

$\bar{\bar{W}}$ – матриця (дискретний оператор) перетворення Уолша-Адамара;

$\bar{\bar{D}}_N$ – нормована (поділена на N) матриця похідних від оператора $\bar{\bar{W}}$;

T – знак транспонування.

Введемо наступне позначення:

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{W}} \cdot \bar{\bar{D}}_N. \quad (5.25)$$

При використанні перетворення Уолша-Адамара впорядкованого за Адамаром матриці-оператори диференціювання $\bar{\bar{A}}$ мають блочно-діагональну структуру:

$$\bar{\bar{A}}(n) = \text{diag}(\bar{\bar{B}}(0), \bar{\bar{B}}(1), \dots, \bar{\bar{B}}(i), \dots, \bar{\bar{B}}(n)), \quad (5.26)$$

де i – номер блоку оператора $\bar{\bar{A}}$, $n = \log_2(N)$;

$\overline{\overline{B}}(i)$ – матриці-блоки розміром $N_i \times N_i$, $N_i = 2^{i-1}$, які розташовані на головній діагоналі матриці $\overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{D}}_H^T$. Виключення становить блок $\overline{\overline{B}}(0)$, що має розмір 1×1 .

Аргумент n в позначенні оператора $\overline{\overline{A}}(n)$ чітко вказує на порядок матриці $\overline{\overline{A}}$, але завжди його вказувати немає необхідності, тому зазвичай ми його будемо опускати, розуміючи, що всі матриці і вектори у формулі мають відповідні розміри.

Вираз (5.26) також можна записати у формі

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A}}(n) &= \text{diag}(\overline{\overline{B}}(0), \overline{\overline{B}}(1), \dots, \overline{\overline{B}}(i), \dots, \overline{\overline{B}}(n)) = \text{diag}(\overline{\overline{A}}(n-1), \overline{\overline{B}}(n)) = \\ &= \overline{\overline{A}}(n-1) + \text{diag}(\overline{\overline{0}}_n, \overline{\overline{B}}(n)).\end{aligned}$$

де $\overline{\overline{0}}_i$ – матричний нуль порядку $2^{i-1} \times 2^{i-1}$ та $\overline{\overline{0}}_0$ має розмір 1×1 .

Не важко показати, що при піднесенні $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{D}}_H^T$ в степінь n , будуть взаємодіяти лише відповідні блоки:

$$\left(\overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{D}}_H^T \right)^n = \text{diag}(\overline{\overline{B}}(0)^n, \overline{\overline{B}}(1)^n, \dots, \overline{\overline{B}}(i)^n, \dots, \overline{\overline{B}}(n)^n) \quad (5.27)$$

де n – порядок похідної (степінь дискретного оператора диференціювання).

Блоки-матриці $\overline{\overline{B}}(i)$ дискретного оператора диференціювання $\overline{\overline{A}}$ можна обчислити за допомогою наступного рекурсивного алгоритму:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{B}}(0) &= [0]; \\ \overline{\overline{B}}(1) &= [1]; \\ \overline{\overline{B}}(i) &= \text{diag}(\overline{\overline{B}}(0), \dots, \overline{\overline{B}}(i-1)) + \frac{1}{2^{i-2}} \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\left(\text{тут множення матриць є кронекеровим множенням праворуч} \right) \\ &\left(\prod_{k=1}^{i-1} \overline{\overline{M}} = \left(\prod_{k=1}^{i-2} \overline{\overline{M}} \right) \otimes \overline{\overline{M}} = \underbrace{\overline{\overline{M}} \otimes \overline{\overline{M}} \otimes \dots \otimes \overline{\overline{M}}}_{i-1 \text{ раз}} \right).\end{aligned} \quad (5.28)$$

Можна запропонувати наступний рекурсивний алгоритм одержання кронекерівського добутку матриць $\prod_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

$$\prod_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \prod_{k=1}^{i-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \prod_{k=1}^{i-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\prod_{k=1}^{i-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ -\prod_{k=1}^{i-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Приклад. Знайдемо блоки-матриці $\bar{\bar{B}}(i)$, при $i=0, 1, 2, 3$, дискретного оператора диференціювання $\bar{\bar{A}}$ за формулами (5.26), (5.27)

$$\begin{aligned}\bar{\bar{A}}(3) &= \text{diag}(\bar{\bar{B}}(0), \bar{\bar{B}}(1), \bar{\bar{B}}(2), \bar{\bar{B}}(3)). \\ \bar{\bar{B}}(0) &= [0]; \\ \bar{\bar{B}}(1) &= [1]; \\ \bar{\bar{B}}(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \bar{\bar{B}}(3) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Елементи дискретного оператора диференціювання похідної другого порядку $\bar{\bar{A}}^2$ можна обчислити для кожного блока окремо згідно виразу (5.27), виконуючи не пряме перемноження двох блоків, а користуючись виразом (5.28):

$$\begin{aligned}\bar{\bar{B}}(i)^2 &= \left(\text{diag}(\bar{\bar{B}}(0), \dots, \bar{\bar{B}}(i-1)) + \frac{1}{2^{i-2}} \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^2 = \\ &= \text{diag}(\bar{\bar{B}}(0), \dots, \bar{\bar{B}}(i-1))^2 + \frac{1}{2^{i-2}} \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \text{diag}(\bar{\bar{B}}(0), \dots, \bar{\bar{B}}(i-1)) + \\ &\quad \text{diag}(\bar{\bar{B}}(0), \dots, \bar{\bar{B}}(i-1)) \cdot \frac{1}{2^{i-2}} \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2^{i-2}} \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^2 \\ \text{причому} \quad &\left(\frac{1}{2^{i-1}} \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^2 = 0; \quad \text{diag}(\bar{\bar{B}}(0), \dots, \bar{\bar{B}}(i-1))^2 = \bar{\bar{A}}(i-1)^2.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Варто зазначити, що $\bar{\bar{A}}(i-1)^2$ вже мають місце бути обчисленими. Знаходження ж двох інших доданків не становить особливих труднощів й може бути обчислено навіть вручну при достатньо невеликому порядку перетворення N .

Дискретного оператора диференціювання похідної третього порядку $\bar{\bar{A}}^3$ можна обчислити помножуючи (5.29) на (5.28). Продовжуючи так далі можна

було б сформулювати ефективний алгоритм поблочного швидкого формування оператора $\overline{\overline{A}}$ піднесеного до степеня n , використовуючи вже обчислені добутки при формуванні $\overline{\overline{A}}^{n-1}$, якби можна було використати біноміальні коефіцієнти. Але це неможливо, тому що матричне множення зліва та справа не тотожні.

Матричні блоки $\overline{\overline{B}}(k)$ мають наступну чудову властивість.

Слід матричних блоків $\text{tr}(\overline{\overline{B}}(i))$ визначається їхнім розміром і його значення може бути обчислено як

$$\text{tr}(\overline{\overline{B}}(i)) = 2^{i-1}. \quad (5.30)$$

Доказ є дуже простим. Очевидно, що $\overline{\overline{A}}(1) = 2$ та $\text{tr}(\overline{\overline{B}}(2)) = 2$, далі всі матриці згідно (3.9)

$$\overline{\overline{B}}(i) = \text{diag}(\overline{\overline{A}}(i-2), \overline{\overline{B}}(i-1)) + \frac{1}{2^{i-2}} \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Неважко показати, що

$$\text{tr}\left(\frac{1}{2^{i-2}} \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Тоді згідно (5.31) $\overline{\overline{B}}(3) = 4$ і далі за (5.31).

Отже, слід самої блочно-діагональної матриці $\overline{\overline{A}}$ розміром $N \times N$

$$\overline{\overline{A}}(n) = \text{tr}(\text{diag}(W(0), \dots, W(n))) = 2^n = N. \quad (5.32)$$

5.7. Аналіз лінійної системи при ортогональному розкладі матричного оператора диференціювання на власні вектори та власні числа

Як було показано вище (розділ 2) розв'язання лінійних рівнянь в базисі перетворення Уолша в області натуральних координат призводить до використання різницевих методів аналізу.

В області трансформант при використанні функцій Уолша при їх впорядкуванні за Адамаром диференційне рівняння

$$\begin{aligned} a_m \cdot \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = \\ = b_n \cdot \frac{d^n x(t)}{dt^n} + b_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + b_0 \cdot x(t) \end{aligned} \quad (5.33)$$

перетворюється до матричного рівняння

$$\begin{aligned} & \left(a_m \cdot \bar{\bar{A}}^m + a_{m-1} \cdot \bar{\bar{A}}^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \bar{\bar{A}} + a_0 \cdot \bar{\bar{E}} \right) \cdot \bar{Y}_\xi = \\ & = \left(b_n \cdot \bar{\bar{A}}^n + b_{n-1} \cdot \bar{\bar{A}}^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \bar{\bar{A}} + b_0 \cdot \bar{\bar{E}} \right) \cdot \bar{X}_\xi, \end{aligned} \quad (5.34)$$

де $\bar{\bar{A}}^m = \left[\bar{\bar{W}} \cdot \bar{\bar{D}}_H^T \right]^m$;

$\bar{\bar{E}}$ – одинична матриця;

$\bar{\bar{W}}$ – матриця (дискретний оператор) перетворення Уолша-Адамара;

$\bar{\bar{D}}_H$ – нормована (поділена на N) матриця похідних від оператора $\bar{\bar{W}}$;

T – знак транспонування; N – порядок квадратних матриць $\bar{\bar{A}}^k, \bar{\bar{E}}$;

\bar{Y}_ξ, \bar{X}_ξ – стовпці амплітуд трансформант відповідно реакції та дії розміру $N \times 1$.

Відомо також (розділ 3), що матриці $\bar{\bar{A}}$ мають блочно-діагональний вигляд і складаються з блоків діагоналі $1, 1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$ порядків, якщо $N=2^n$. Ясно, що такий самий вигляд мають і всі k -ті степені ($k = 1, 2, \dots, m$) $\bar{\bar{A}}^k$ матричних операторів (5.34), одержувані поблочним зведенням у відповідну степінь кожного блока діагоналі окремо.

Введемо наступні позначення:

$$\bar{\bar{A}}_\Sigma = a_m \cdot \bar{\bar{A}}^m + a_{m-1} \cdot \bar{\bar{A}}^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \bar{\bar{A}} + a_0 \cdot \bar{\bar{E}};$$

$$\bar{\bar{B}}_\Sigma = b_n \cdot \bar{\bar{A}}^n + b_{n-1} \cdot \bar{\bar{A}}^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \bar{\bar{A}} + b_0 \cdot \bar{\bar{E}}.$$

Тоді матричне рівняння (5.34) можна записати у скороченому вигляді

$$\bar{\bar{A}}_\Sigma \cdot \bar{Y}_\xi = \bar{\bar{B}}_\Sigma \cdot \bar{X}_\xi, \quad (5.35)$$

звідки розв'язок диференційного рівняння (4.1) в області трансформант має вигляд

$$\bar{Y}_\xi = \bar{\bar{A}}_\Sigma^{-1} \cdot \bar{\bar{B}}_\Sigma \cdot \bar{X}_\xi, \quad (5.36a)$$

а розв'язок зворотної задачі (пошук дії, відповідної до одержаної реакції досліджуваної системи)

$$\bar{X}_\xi = \bar{\bar{B}}_\Sigma^{-1} \cdot \bar{\bar{A}}_\Sigma \cdot \bar{Y}_\xi. \quad (5.36b)$$

Оскільки задача формування кожного з матричних операторів $\bar{\bar{A}}$ порядку $N=2^n$ не викликає труднощів (див. розділ 3) і може бути розв'язана заздалегідь, основну задачу становить обернення матриць $\bar{\bar{A}}_\Sigma, \bar{\bar{B}}_\Sigma$ (для кожного блоку діагоналі).

Для обернення матриці $\overline{\overline{A}}_\Sigma$ представимо кожний i -й блок діагоналі відповідним ортогональним матричним розкладом на власні значення і власні вектори

$$\overline{\overline{A}}_\Sigma = \overline{\overline{P}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{\lambda}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{P}}_\Sigma^*, \quad (5.37)$$

де $\overline{\overline{P}}_\Sigma$ – матриця власних векторів;

* – знак комплексного спряження та транс-понування;

$\overline{\overline{\lambda}}_\Sigma$ – діагональна матриця власних значень матриці $\overline{\overline{A}}_\Sigma$, причому

$$\overline{\overline{P}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{P}}_\Sigma^* = \overline{\overline{P}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{P}}_\Sigma^{-1} = \overline{\overline{E}}.$$

Якщо матриця $\overline{\overline{\lambda}}_\Sigma$ не має нульових значень, тоді

$$\overline{\overline{A}}_\Sigma^{-1} = \overline{\overline{P}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{\lambda}}_\Sigma^{-1} \cdot \overline{\overline{P}}_\Sigma^*. \quad (5.38)$$

Для реалізації виразів (5.37), (5.38) необхідно обчислити власні значення блоків матриці $\overline{\overline{A}}_\Sigma$, структура якої детальніше описана виразом (5.34). Матриця $\overline{\overline{A}}_\Sigma$ має жорстку структуру, але чисельні значення (як і слід було очікувати) для кожного диференційного рівняння залежать не тільки від (завжди однакових) коефіцієнтів i -го блоку матриці $\overline{\overline{A}}$, але й від коефіцієнтів диференційного рівняння a_i та b_i .

Тому покажемо зв'язок між власними значеннями блоку матриці $\overline{\overline{A}}_\Sigma$ і власними значеннями i -го блоку матриці $\overline{\overline{A}}$ в (5.34).

Нехай для блока матриці $\overline{\overline{A}}_i$ в (5.34) знайдено усі власні значення і власні вектори, тоді вірно

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{\lambda}} \cdot \overline{\overline{P}}^*.$$

Блок діагоналі матриці $\overline{\overline{A}}^2$, тобто $\overline{\overline{A}}_i^2$, одержимо множенням матричних виразів

$$\overline{\overline{A}}^2 = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{A}} = \left(\overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{\lambda}} \cdot \overline{\overline{P}}^* \right) \cdot \left(\overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{\lambda}} \cdot \overline{\overline{P}}^* \right) = \overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^2 \cdot \overline{\overline{P}}^*.$$

Аналогічно

$$\overline{\overline{A}}^k = \overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^k \cdot \overline{\overline{P}}^* ; \quad \overline{\overline{A}}^0 = \overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^0 \cdot \overline{\overline{P}}^* = \overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \overline{\overline{P}}^*.$$

Розклад (2) після винесення за дужки матриць власних векторів матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \overline{\overline{P}} \cdot (a_m \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i^m + a_{m-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i + a_0 \cdot \overline{\overline{E}}) \cdot \overline{\overline{P}}^* \cdot \overline{\overline{U}}_\xi = \\ & = \overline{\overline{P}} \cdot (b_n \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i^n + b_{n-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i + b_0 \cdot \overline{\overline{E}}) \cdot \overline{\overline{P}}^* \cdot \overline{\overline{I}}_\xi, \end{aligned}$$

або

$$\overline{\overline{P}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A} \cdot \overline{\overline{P}}_{\Sigma}^* \cdot \overline{U}_{\xi} = \overline{\overline{P}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B} \cdot \overline{\overline{P}}_{\Sigma}^* \cdot \overline{I}_{\xi}. \quad (5.39)$$

В дужках виразу (5.39) запишемо суму зважених коефіцієнтів a_k , b_k діагональних матриць, тобто сума теж буде діагональною матрицею, а елементи діагоналі – це власні значення того самого i -го блоку матриці $\overline{\overline{\lambda}}_k$ в (5.37). Аналогічно для кожного блоку.

Тоді розв'язок (5.36а) одержує вигляд

$$\overline{Y}_{\xi} = \overline{\overline{P}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \overline{\overline{P}}_{\Sigma}^* \cdot \overline{\overline{P}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B} \cdot \overline{\overline{P}}_{\Sigma}^* \cdot \overline{X}_{\xi} = \overline{\overline{P}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B} \cdot \overline{\overline{P}}_{\Sigma}^* \cdot \overline{X}_{\xi}, \quad (5.40a)$$

а розв'язок (5.36б)

$$\overline{X}_{\xi} = \overline{\overline{P}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B}^{-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A} \cdot \overline{\overline{P}}_{\Sigma}^* \cdot \overline{Y}_{\xi}. \quad (5.40b)$$

5.8 Алгоритм розв'язання лінійних диференційних рівнянь в області трансформант перетворення Уолша-Адамара при впорядкуванні базисних функцій за Адамаром

Таким чином при реалізації алгоритму аналізу лінійних систем (диференційних рівнянь) в базисі перетворення Уолша-Адамара необхідно:

1. Сформувані лінійне матричне диференційне рівняння (5.33), внаслідок чого будуть одержані коефіцієнти a_i та b_i в чисельному вигляді або у вигляді функцій від деяких параметрів, компонентів системи.

2. Знайти спектр сигналу дії або реакції в базисі перетворення Уолша-Адамара:

$$\overline{X}_{\xi} = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{X}_t, \quad (5.41a)$$

$$\overline{Y}_{\xi} = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{Y}_t. \quad (5.41b)$$

3. Для прямої задачі сформувані масив діагональних елементів для кожного i -го блоку добутку матриць $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B}$, де dd -й елемент діагоналі має вигляд $\lambda_{\Sigma \Sigma dd}$

$$\lambda_{\Sigma \Sigma dd} = \frac{b_n \cdot \lambda_{dd}^n + b_{n-1} \cdot \lambda_{dd}^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \lambda_{dd} + b_0}{a_m \cdot \lambda_{dd}^m + a_{m-1} \cdot \lambda_{dd}^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda_{dd} + a_0}. \quad (5.42a)$$

Аналогічно для зворотної задачі

$$\lambda_{\Sigma \Sigma dd} = \frac{a_m \cdot \lambda_{dd}^m + a_{m-1} \cdot \lambda_{dd}^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda_{dd} + a_0}{b_n \cdot \lambda_{dd}^n + b_{n-1} \cdot \lambda_{dd}^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \lambda_{dd} + b_0}. \quad (5.43b)$$

4. За формулою (5.40а) або (5.40б) обчислити спектр шуканої реакції.

5. За формулами зворотного перетворення Уолша

$$\overline{Y}_t = \frac{1}{N} \overline{\overline{W}} \cdot \overline{Y}_{\xi}, \quad (5.44a)$$

$$\bar{X}_t = \frac{1}{N} \bar{W} \cdot \bar{X}_\xi \quad (5.446)$$

знайти відліки реакцій у натуральних координатах.

Оцінимо трудомісткість запропонованого алгоритму розв'язання диференціальних рівнянь в базисі перетворення Уолша-Адамара.

Для формування діагональних елементів матриці $\bar{\lambda}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \bar{\lambda}_{\Sigma B}$ необхідно $2N$ операцій множення і стільки ж операцій алгебраїчного додавання.

Для множення матриць $\bar{\lambda}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \bar{\lambda}_{\Sigma B} \cdot \bar{\Pi}^*$ необхідно N^2 операцій множення, а для множення одержаного добутку на матрицю $\bar{\Pi}$ ще $N^3/8$ операцій множення і стільки ж додавань.

Отже, трудомісткість розв'язання задачі аналізу диференціального рівняння в базисі перетворення Уолша-Адамара становить приблизно $N^3/8$ операцій множення (без операцій ділення), що приблизно в вісім разів менше кількості трудомістких операцій обернення матриці \bar{A}_Σ методом Гауса. Але відсутність операції ділення в запропонованому алгоритмі забезпечує більшу точність обчислень з обмеженою розрядністю операндів, що є однією з найсуттєвіших переваг у порівнянні з методом прямого обернення матриць $\bar{A}_\Sigma, \bar{B}_\Sigma$.

Оцінити похибку матричного розв'язку можна за середньоквадратичним відхиленням від точного розв'язку, отриманого операційним методом,

$$\delta = \sqrt{\int_0^T \left(\text{step}(\bar{X}_{1t}, \bar{V}_t, t) - X(t) \right)^2 dt}, \quad (5.45)$$

де $\text{step}(\bar{X}_{1t}, \bar{V}_t, t) = X_t(m) \cdot [1(t - m \cdot \Delta t) - 1(t - (m + 1) \cdot \Delta t)]$ при

$V_t(m) \leq t < V_t(m + 1)$;

\bar{X}_{1t} – розв'язок матричного рівняння в часовій області;

$X_{1t}(m)$ – m -й елемент вектора \bar{X}_{1t} ;

$V_t(m)$ – m -й елемент вектора часових відліків \bar{V}_t , що відповідає \bar{X}_{1t} ;

$1(t)$ – функція Хевісайда.

Функція $\text{step}(\bar{X}_{1t}, \bar{V}_t, t)$ – це сходинова апроксимація функції $X(t)$ на основі отриманого розв'язку матричного рівняння запропонованим алгоритмом, а компоненти вектора \bar{V}_t – значення моментів часу, в які було взято відліки $X(t)$. Тобто при еквідистантних відліках і форматі перетворення N :

$$\bar{V}_t = \{V_t(m) = m \cdot \Delta t, m = 0, 1, 2, \dots, N-1\}. \quad (5.46)$$

Таким чином за допомогою матричного рівняння в області перетворення Уолша-Адамара можна вирішувати пряму та зворотну задачу аналізу лінійних систем при дії, яка має вигляд періодичної послідовності.

В теорії лінійних електричних кіл широко застосовуються перехідна та імпульсна характеристики кола. Внаслідок періодичності функцій Уолша неможливо отримати спектр функцій Хевісайда, а внаслідок скінченної частоти дискретизації f та формату перетворення N – отримати спектр функції Дірака. Однак її можна отримати з точністю, яка обмежена лише частотою дискретизації та форматом перетворення, реакцію кола на прямокутний імпульс дії.

Якщо тривалість імпульсу τ набагато менша, а період послідовності одиночних імпульсів T_{Π} набагато більший за постійну часу електричного кола, то реакція буде наближатися до імпульсної характеристики даного кола.

Якщо тривалість імпульсу τ та період послідовності одиночних імпульсів T_{Π} набагато більші за постійну часу електричного кола, причому $\tau \ll T_{\Pi}$, то реакція буде наближатися до перехідної характеристики даного кола. Якщо бути максимально точним, реакція буде мати форму різниці двох перехідних характеристик, що мають зсув у часі.

Розглянемо проблему знаходження реакції на прямокутний імпульс більш детально.

Точність рішення залежить від формату перетворення N та інтервалу T на якому розглядається функція. Слід підкреслити, що $T=T_{\Pi}$. Від N та T залежать період та частота дискретизації

$$\Delta t = \frac{T}{N}, f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{N}{T}. \quad (5.47)$$

Враховуючи $\tau = \text{const}$, мають місце наступні твердження:

1. $T_{\Pi} = \text{const}$. При збільшенні формату перетворення N підвищується точність розв'язку внаслідок зменшення Δt , але збільшується кількість обчислень, необхідний машинний час, збільшуються вимоги до апаратури і, можливо, програмна реалізація.

2. $N=\text{const}$. При збільшенні інтервалу T_{Π} зменшується автокореляційна залежність між періодичними послідовностями імпульсів реакції, адже функції Уолша є періодичними, та зменшується точність розв'язку внаслідок збільшення Δt . При зменшенні інтервалу T_{Π} зростає кореляційна залежність та точність, відповідно.

Для того, щоб уникнути накладання реакцій від сусідніх імпульсів вхідної періодичної послідовності необхідно велике затухання реакції на

один імпульс на інтервалі $T=T_{\Pi}$. Як параметр, який визначає затухання візьмемо відношення максимального і мінімального компонентів вектора дискретних відліків реакції \bar{U}_t .

$$d(f) = \frac{\min(\bar{U}_t(f))}{\max(\bar{U}_t(f))}, \quad (5.48)$$

де $\min(\bar{U}_t(f))$ – функція, що повертає мінімальний компонент вектора $\bar{U}_t(f)$; $\max(\bar{U}_t(f))$ – функція, що повертає максимальний компонент вектора $\bar{U}_t(f)$; f – частота дискретизації, яка є аргументом для функції характеристики затухання $d(f)$ та параметром від якого залежить значення вектор відліків реакції \bar{U}_t .

Розглянемо приклад.

Для ілюстрації запропонованого алгоритму розглянемо приклад, обраний, виходячи з простоти перевірки одержаних результатів.

Нехай надане коло рис. 1, для якого треба знайти напругу $U(t)$, що є реакцією на вхідний прямокутний імпульс напруги $I(t)$.

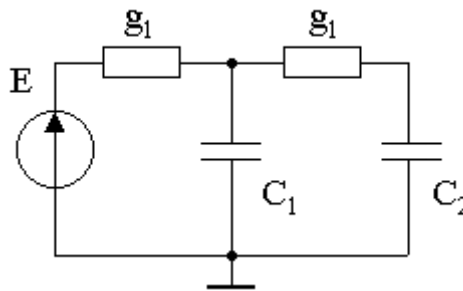


Рис. 5.1.

Наведемо розв'язок задачі класичним методом.

Знайдемо функцію передачі по напрузі операційного числення K_{13} .

$K_{13} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}.$				
		1	2	3
	1	g_1	$-g_1$	0
	2	$-g_1$	$g_1 + g_2 + p \times C_1$	$-g_2$
$K_{13} =$		3	0	$-g_2$
				$g_2 + p \times C_2$

звідки

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (g_1 + g_2 + p \cdot C_1) \cdot (g_2 + p \cdot C_2) - g_1^2 = \\ &= p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 + p \cdot [C_2 \cdot (g_1 + g_2) + C_1 \cdot g_2] + g_1 \cdot g_2, \end{aligned}$$

$$\Delta_{13} = g_1 \cdot g_2$$

та

$$K_{13}(p) = \frac{g_1 \cdot g_2}{p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 + p \cdot [C_2 \cdot (g_1 + g_2) + C_1 \cdot g_2] + g_1 \cdot g_2}.$$

Відповідне диференціальне рівняння даної лінійної системи:

$$C_1 \cdot C_2 \frac{d^2 U_3(t)}{dt^2} + [C_2 \cdot (g_1 + g_2) + C_1 \cdot g_2] \frac{dU_3(t)}{dt} + g_1 \cdot g_2 U_3(t) = g_1 \cdot g_2 \cdot e(t).$$

Для простоти обчислень прийmemo $C_1 = C_2 = C = 1$, $g_1 = g_2 = g = 1$. Тоді

$$K_{13}(p) = \frac{1}{p^2 + 3 \cdot p + 1}, \quad \frac{d^2 U_3(t)}{dt^2} + 3 \frac{dU_3(t)}{dt} + U_3(t) = e(t).$$

Знайдемо реакцію схеми на прямокутний імпульс одиничної амплітуди операційним методом:

$$U(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \cdot K_{13}(p) - \frac{\exp(-p \cdot \tau)}{p} \cdot K_{13}(p) \right\},$$

де τ – тривалість імпульсу.

$$U(t) = \text{fan}(t) \cdot 1(t) - \text{fan}(t - \tau) \cdot 1(t - \tau),$$

$$\text{де fan}(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{\exp\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot t\right)}{3+\sqrt{5}} - \frac{\exp\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot t\right)}{3-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right);$$

$1(t)$ – функція Хевісайда.

Нехай $\tau = 1$. Графіки функцій дії $I(t)$ та реакції $U(t)$ зображені на рис. 5.2 та рис. 5.3, відповідно.

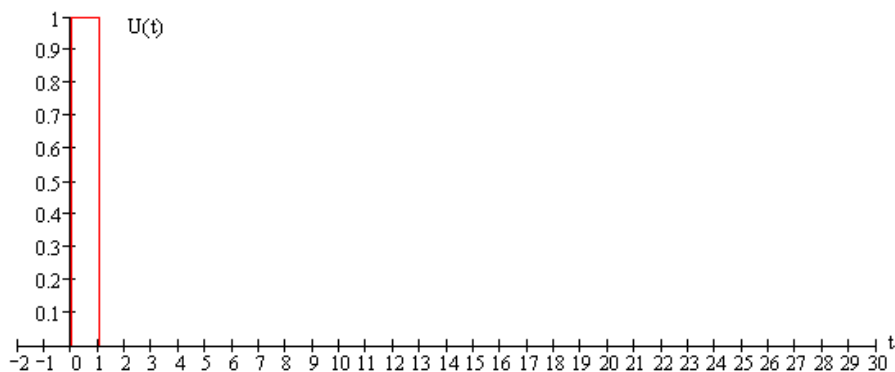


Рис. 5.2 .

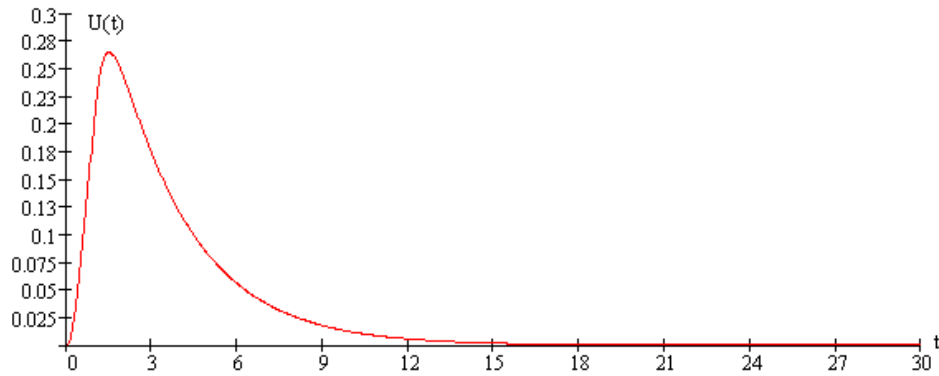


Рис. 5.3

Розв'язок задачі запропонованим методом.

В області перетворення Уолша-Адамара диференціальне рівняння має вигляд

$$\left(f^2 \cdot \overline{A}^2 + 3 \cdot f \cdot \overline{A} + \overline{E} \right) \cdot \overline{U}_\xi = \overline{I}_\xi.$$

Розв'язок цього рівняння

$$\overline{U}_\xi = \left(f^2 \cdot \overline{A}^2 + 3 \cdot f \cdot \overline{A} + \overline{E} \right)^{-1} \cdot \overline{I}_\xi.$$

Виберемо формат перетворення $N = 128$. Заданому вище $\tau = 1$ відповідає максимальний період дискретизації $\Delta t_{\text{MAX}} = \tau = 1$. Менші можливі періоди є його дільниками

$$\Delta t = \frac{\tau}{f} = \frac{1}{f},$$

де f – частота дискретизації, яка є цілим числом.

Відповідний інтервал та період послідовності $T = T_{\text{П}}$

$$T = \Delta t \cdot N = \frac{\tau}{f} \cdot N = \frac{N}{f}.$$

Нехай $f = 1, 2, 3, \dots, N/2 = 1, 2, 3, \dots, 64$. Таким чином ми отримаємо 64 відмінних між собою розв'язки рівняння. Відповідно до викладеного вище наведемо їхні параметри, виконані у вигляді графіків для наочності.

За формулою (5.47) обчислимо значення функції затухання $d(f)$ (рис. 5.4) в залежності від частоти дискретизації. Для зручності сприймання інформації графік має логарифмічний масштаб по вісі функції і звичайний по вісі аргументу. Точковою лінією наведено можливий поріг відношення, що задовільно умові максимально можливого затухання.

Використовуючи формулу (5.46) побудуємо графік функції залежності інтервалу $T(f)$ (рис. 5.5) від частоти дискретизації f , де тривалість інтервалу вимірюється в безрозмірних одиницях часу Δt .

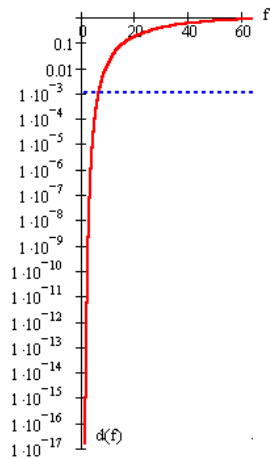


Рис. 5.4

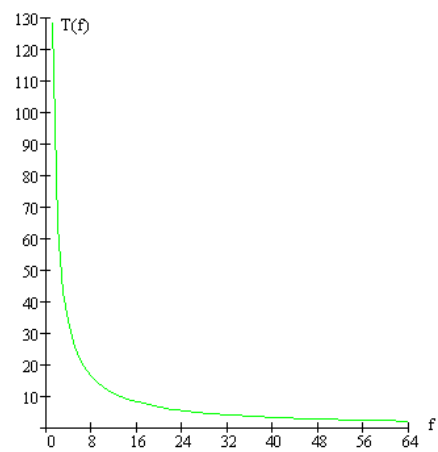


Рис. 5.5

Використовуючи формулу (5.44) побудуємо графік функції похибки $\delta(f)$ в залежності від частоти дискретизації f . Графік нормовано відносно мінімального значення, що приймає функція при $f=11$.

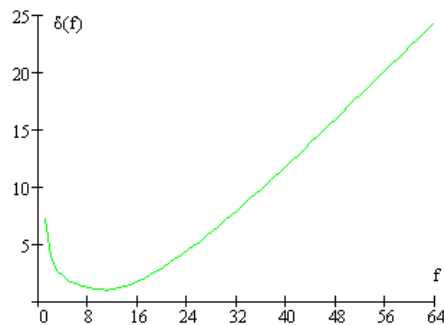
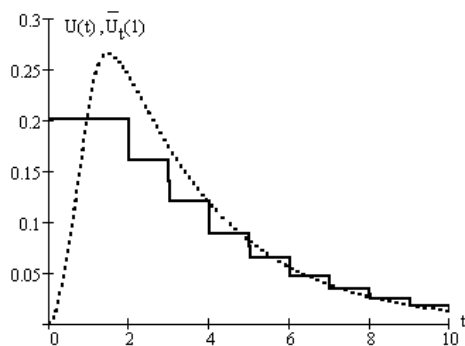
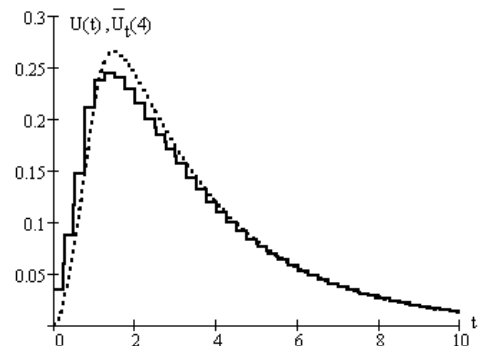


Рис. 5.6.

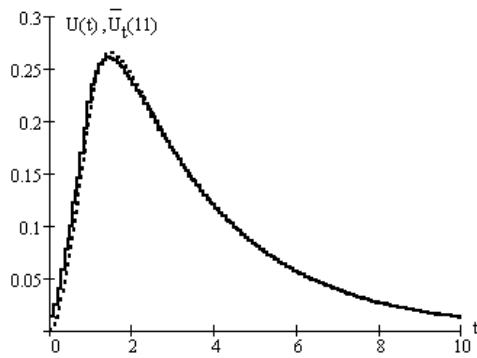
Немає потреби наводити всі 64 розв'язки матричного диференційного рівняння. Для візуалізації наведених вище залежностей вистачить декілька графіків для різних значень частоти дискретизації f . На рисунках точками позначена крива точного рішення отриманого операційним методом, а неперервною лінією отриманий матричний розв'язок.



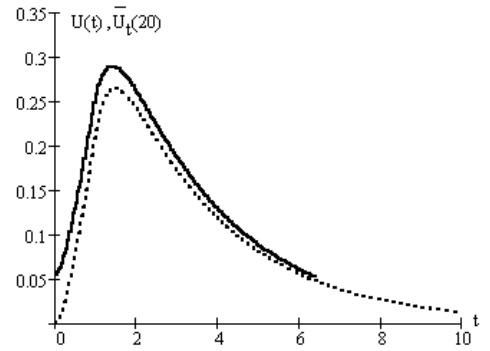
а). $\bar{U}_t(f)$ при $f=1$.



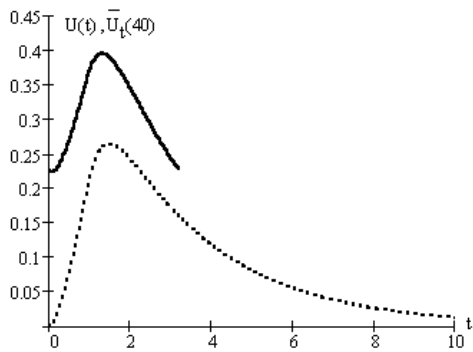
б). $\bar{U}_t(f)$ при $f=4$.



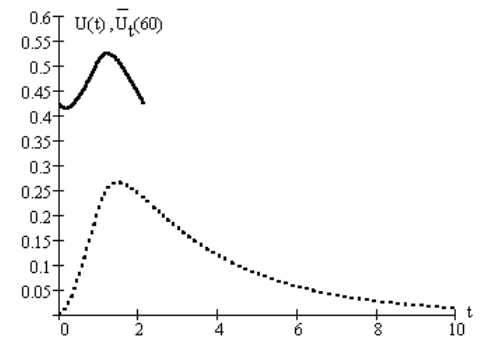
б). $\bar{U}_t(f)$ при $f = 11$.



в). $\bar{U}_t(f)$ при $f = 20$.



г). $\bar{U}_t(f)$ при $f = 40$.



д). $\bar{U}_t(f)$ при $f = 60$.

Рис. 5.7.

5.9. Висновки

1. Одержані результати ілюструють простоту реалізації розробленого методу аналізу лінійних систем в області трансформант Уолша-Адамара при впорядкуванні базисних функцій за Адамаром, що зручно, коли аналіз, стиснення, архівацію та класифікацію сигналів певних класів проводять саме в цьому координатному базисі.

2. Запропонований алгоритм аналізу лінійних систем для реалізації не потребує обчислень нулів-полісів функцій кола, що в певних випадках можна вважати його позитивною рисою.

3. Даний алгоритм є складовою частиною підходу, який полягає в створенні математичного апарату аналізу систем на базі перетворень, відмінних від перетворення Фур'є. Алгоритм дає можливість такого аналізу в новітньому ортогональному базисі перетворень і указує на необхідність та можливість подальшого розвитку теорії розв'язання диференціальних рівнянь в нетрадиційних базисах.

4. Сумарна матриця власних значень $\bar{\lambda}_\Sigma$ має діагональний вигляд, що аналогічно аналізу лінійних систем в області перетворення Фур'є. Тому існує

потреба дослідити кратне ортогональне перетворення, матричний оператор якого має вигляд добутку оператора перетворення Уолша-Адамара $\overline{\overline{W}}$ та блочно-діагональної матриці власних векторів дискретного оператора диференціювання $\overline{\overline{P}}$.

РОЗДІЛ 6. НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ (СИСТЕМИ, ЩО ІМІТУЮТЬ МИСЛЕННЯ)

6.1 Основні характеристики головного мозку людини

Мозок людини складається з **нейронів** та інших клітин. Нейронів в головному мозку людини порядку $40 \times 10^9 \dots 100 \times 10^9$. Кожен нейрон має $10^4 \dots 10^5$ з'єднань з іншими нейронами. Потужність обчислювальної системи головного мозку становить $10^{14} \dots 10^{16}$, в той час як у сучасних ЕОМ вона не перевищує $10^7 \dots 10^9$. Вага мозку людини становить 1350г (у чоловіків) та 1200 (у жінок). Вага не має великого значення для розумової діяльності людини. Так, у неандертальців вага мозку була значно більшою. Для розумової діяльності велике значення має **кора головного мозку** (cortex або **neokortex**). **Неокортекс** дуже звинений, його площа становить 2500 см^2 , а товщина – 3мм. Сірий шар кортексу утворюють власні тіла нейронів – **сомати**. На вході сомат розташовані вхідні нервові волокна – **дендрити** (рис.6.1), а на виході – лише одне вихідне волокно – **аксон**. Для зв'язку окремих нейронів між собою аксони (які мають велику кількість розгалужень) підключаються до дендритів інших нейронів за допомогою спеціальних контактів – **синапсів**.

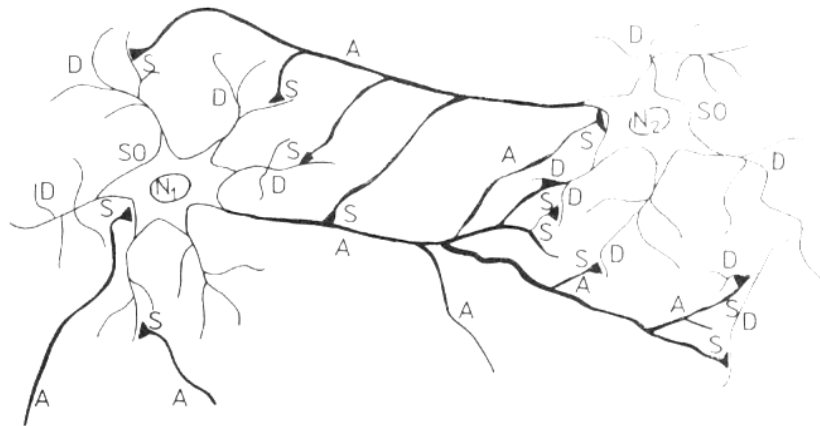


Рис.6.1.

D – дендрити; A – аксони; S – синапси; SO – сомати; N_i – ядра нейронів.

В шарі неокортексу 4% маси займають тіла нейронів (сомати), 80% – дендрити; 8% – допоміжні клітини (джерела енергії для нейронів або ізолятори від зовнішніх впливів); 8% – судини (капіляри), які мають сумарну довжину $\approx 80 \text{ км}$. Довжина самих дендритів досягає декількох міліметрів, а аксонів – від міліметрів до 60 сантиметрів. Мозок людини становить 2% від маси людини, але використовує 23% кисню, для чого потрібно 14% маси крові.

Мозок має асоціативну властивість, тобто, якщо на сітківці ока одержується $\approx 10^7$ бітів інформації за секунду, а мозком обробляється 15 – 25 бітів за секунду (виключно «суттєвої» інформації).

За сучасними уявленнями працюють при життєдіяльності людини тільки 4% нейронів. Тобто решта нейронів є збитковою. Густина нейронів в мозку становить $2 \times 10^6 \dots 3 \times 10^6$ на 1мм^2 . Діаметр сомат становить від 1...3 мкм до 100мкм. З часом нейрони гинуть. Щодня відмирає близько 10000 нейронів, що становить за 75 років життя 0,2...0,5 відсотків від їх загальної кількості. З точки зору забезпечення нейронами (за сучасними поняттями) час життя людини повинен був би становити 7500...15000 років.

Синапси служать для організації явища, яке називають пам'яттю. Розрізняють три види пам'яті:

1. **короткотермінова пам'ять** – **циркуляція збудження** по замкнених колах нейронів;
2. **середньотермінова пам'ять** – при багатократному проходженні збудження **синапси утворюють нові рибонуклеїнові кислоти**;
3. **довготермінова пам'ять** – «**впечатування**» рибонуклеїнових кислот до білкових структур (стала пам'ять).

6.2. Модель нейрону

Запропонована в 1943р. МакКаллахом і Піттсом модель нейрону відповідає скоріше нашому сучасному (достатньо дилетантському) уявленню про процеси, що відбуваються у нейроні. Тим не менше, такі моделі виявилися конструктивними з точки зору створення сучасної техніки та математики оброблення електричних інформативних сигналів. Модель представляє собою суматор (рис.6.2), який підсумовує зважені (вагами w_i) вхідні сигнали x_i , тобто реалізує операції

$$\alpha = \sum_{i=1}^N x_i \times w_i \quad (6.1)$$

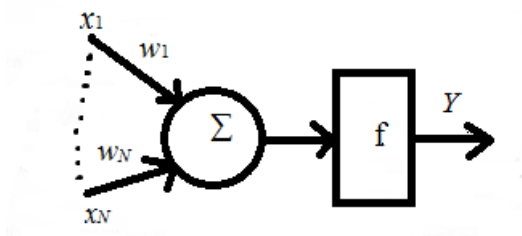


Рис.6.2

Далі зважена сума α з (6.1) надходить на перетворювач $f(\cdot)$, який створює вихідний сигнал Y

$$Y = f\left(\sum_{i=1}^N x_i \times w_i\right) = f(\alpha) \quad (6.2)$$

Найпростішими функціями $f(\alpha)$ (функціями нейрона) є наступні:

1.

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \alpha > \theta; \\ 0, \text{ якщо } \alpha < \theta. \end{cases} \quad (6.3)$$

де θ – деяке порогове значення.

2.

$$f(\alpha) = (1 + e^{(\theta - \alpha)/\tau})^{-1} \quad (6.4)$$

3.

$$f(\alpha) = \text{th}(\alpha). \quad (6.5)$$

6.3. Найпростіші штучні нейронні мережі

6.3.1. Загальні зауваження

Технічні **нейронні мережі** – це відносно новий засіб **оброблення інформації**. Тому можна сказати, що нейронна мережа реалізує перетворення вхідного векторного простору \bar{X} у векторний простір \bar{Y} вихідний

$$\{\bar{X}\} \rightarrow \{\bar{Y}\}, \quad (6.6)$$

причому розмірності цих просторів у загальному випадку можуть бути різними. Фізичне розділення входу та виходу не повинно обов'язково виконуватися. Процеси в тих самих вузлах та колах можуть в різні моменти роботи мережі бути (за домовленістю) як вхідними, так і вихідними. Таке розуміння нейронних мереж дозволяє ту саму мережу використовувати різними способами.

В радіотехніці найбільш цікавим є застосування нейронних мереж у вигляді

1. **сигнальних процесорів** (вхідні та вихідні вектори представляють собою електромагнітні та електричні сигнали);

2. **класифікаторів** (в цьому разі вхідний вектор представляє сегмент сигналу, а на виході мережі знаходиться інформація про те, до якого класу цей сегмент віднесено);

3. можна також врахувати, що деякі типи мереж мають здатність до **оптимізації**, та використати їх для **реставрації** за обраним критерієм;

4. дуже важливою властивістю деяких типів мереж є їх здатність до реалізації **асоціативної пам'яті**, тобто до відновлення образу на базі певної інформації про нього;

5. При відповідній архітектурі мережі можна досягти того, в деякому шарі мережі утворюється **«вузьке місце»**, що призводить до **стиснення інформації**.

Усі наведені вище функції можна реалізувати і класичними засобами, які вивчаються в інших курсах. Суттєвою тут є **різниця у способах реалізації**.

Якщо класичні засоби були призначені для певної конкретної задачі і можна було точно відобразити їх структуру та аналізувати роботу, нейронні мережі завжди охоплюють **класи розв'язуваних задач, для яких існує ряд структур** реалізації. Принципи роботи мережі та реалізовані мережею операції суттєво залежать від обраного методу та обраної задачі, яку мережа повинна розв'язувати, а також від того, яких алгоритмів було уживано в процесі навчання і як будуть інтерпретовані вихідні величини системи.

У порівнянні до класичних алгоритмів роботи системи можна відзначити деякі характерні відміни нейронних мереж:

1. **елементи** процесорів дуже **прості**, але одночасно завжди працює їх **велика кількість**;

2. велика кількість елементів працює **паралельно**, що радикально збільшує **швидкодiю**;

3. поодинокі елементи (нейрони) звичайно працюють **майже автономно**, в мережі **відсутня** центральна **синхронізація**, тобто нейронним мережам притаманна **асинхронна** робота з розподіленим керуванням;

4. нейрони достатньо сильно між собою пов'язані (**граф мережі наближається до повного**), а зв'язки мають різні ваги, які забезпечують ступінь односпрямованого або взаємного впливу;

5. **ваги**, які разом з обраною структурою мережі визначають її властивості, як правило, **заздалегідь не надані** (як це має місце для параметрів класичних алгоритмів або електричних кіл), а **створюються та підстроюються** в процесі навчання (керованого навчання) на базі обробленої та наданої нової інформації;

6. одержана система ваг, яка повною мірою відображає властивості обробленої інформації, означає здатність до **фіксації** (внутрішнього) **знання**;

7. З вищесказаного випливає значна **адаптивна здатність** мережі, яка проявляється в її надзвичайній **робу́стності** (надійності), тобто можливості при виході з ладу частини мережі або неточних даних одержувати достовірну інформацію. Відповідним чином створена та експлуатована мережа принципово здатна поповнити функції, що вийшли з ладу, так, щоб загальна функція залишалася незмінною, або вірно обробити неповну або спотворену інформацію.

Зауважимо, що ці властивості, раніше технічно неможливі (внаслідок великої складності потрібного для їх реалізації пристрою), при сучасному розвитку техніки (та високому ступені інтеграції кіл) вже можуть бути реалізовані. Крім того, такі властивості мережі, в свою чергу, впливають на стратегію проектування технічних засобів. Наприклад, згадана здатність

регенерації при відмовах дозволяє використовувати кола з надзвичайно великою інтегрованістю, які (внаслідок складності) мають суттєву імовірність відказів (технологи повідомляють, що легше і дешевше виготовити коло з 10^9 елементами, з яких **95%** будуть вірно функціонувати, ніж коло з 10^6 елементами, які усі повинні не мати дефектів, що вимагається для сучасних сигнальних процесорів).

Наведені позитивні властивості та той факт, що в наш час програми роботи з нейронними мережами широко доступні, призвели останні 30 років до надзвичайно широкого розвитку і розповсюдження методів оброблення інформації на базі нейронних мереж.

Теоретичні методи проектування нейронних мереж **не можна** на наш час **вважати достатньо розробленими**, оскільки, хоча сучасні мережі функціонують і дозволяють одержувати необхідні результати, не ясно, **чи** ці результати **оптимальні**, **чи** навіть **задовільні**, враховуючи потенціальні можливості мереж. Це пов'язане з тим, що теоретично не можна прогнозувати результати проектування тієї або іншої структури мережі, так саме, як і результати наступного навчання. Формалізований аналіз (як і синтез) мережі в цій ситуації обмежено лише певними імовірнісними характеристиками, зв'язок яких з розв'язуваною задачею є часто дуже непевним. Останнє викликає і деяку недовіру теоретиків до відповідних методів, пов'язаних з використанням нейронних мереж.

Отже, технічні нейронні мережі виникли спочатку як певні спрощені моделі біологічних нейронних мереж, хоча аналогія між ними дуже віддалена і технічні мережі вже розвиваються своїми окремими шляхами, не залежними від біологічних прототипів.

Сучасні моделі біологічних нейронів, в яких враховують транспортні явища в мембранах, різні механізми поширення дії в нервових волокнах, механізми пам'яті і т.ін., є незрівняно складнішими, ніж елементи технічних нейронних мереж.

У подальшому будемо вживати термін «нейрон» та «нейронна мережа» **виключно** у сенсі елементів і систем **технічних** нейронних мереж.

Хоча ідеологія технічних нейронних мереж дуже виразно відрізняється від всього здобутку попереднього розвитку техніки, деякі підноди (як часткові випадки) створення та функціонування радіоелектронної техніки можна використовувати в разі розробки нейронних мереж.

6.3.2. Поодинокий нейрон

У відповідності до моделі Мак Каллаха та Піттса (6.1),(6.2) рівняння технічного нейрону з N входами має вигляд

$$y = f \left(\sum_{i=1}^N w_i \times x_i - \theta \right). \quad (6.7)$$

Функцію $f(\alpha)$ у подальшому будемо називати характеристикою нейронів. Якщо ввести вагу $w_0 = -\theta$ і сигнал $x_0 = 1$, вираз активації α в (6.7) можна записати у вигляді

$$\alpha = \sum_{i=0}^N w_i \times x_i, \quad (6.8)$$

або

$$y = f(\bar{W}^T \times \bar{X}), \quad (6.9)$$

де $\bar{W}^T = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N]$; $\bar{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$ – вектори рядок та стовпець розмірів $1 \times N$ та $N \times 1$ відповідно; T – знак транспонування.

Областю визначення нейрону є, як правило, N -вимірний простір дійсних чисел R^{N+1} , а областю допустимих значень – деякий інтервал дійсних чисел.

Як приклад розглянемо бінарний нейрон. Такий нейрон класифікує вхідні вектори \bar{X} до двох класів. При наданих вагах \bar{W} розділено на два напівпростори, один з яких включає всі вектори \bar{X}_1 , які на виході нейрону дають одиницю (внаслідок того, що добуток $\bar{W}^T \times \bar{X} \geq \theta$), а другий напівпростір – усі інші вектори (для них добуток $\bar{W}^T \times \bar{X} < \theta$).

Роздільною поверхнею є гіперплощина, задана рівнянням

$$\sum_{i=0}^N w_i \times x_i = 0 \quad (6.10)$$

Рівняння (6.10) роздільної гіперплощини указує, що її розташування у N -вимірному просторі однозначно надане вектором ваг \bar{W} . Цей вектор перпендикулярний (нормальний) до гіперплощини і проходить початком координат. В процесі навчання нейрона він підстроюється. Для керованого навчання нейрона треба покласти, що існує навчальна множина пар (\bar{X}, u_d) . Тут u_d – бажана реакція нейрону на вхідний вектор \bar{X} . Навчання полягає в тому, що справжня реакція нейрону співпадатиме з бажаною і на базі таких порівнянь можна підстроювати вектор \bar{W} .

6.3.2.1. Алгоритм Гебба

Для бінарної моделі існує ряд алгоритмів навчання. Наведемо один з перших – алгоритм Гебба (Hebb) для нейрону з булевими входами та виходом, який ілюструє ідеологію підходів до задачі навчання.

Якщо $y = 1$, тоді

1. Якщо результат вірний, підсилити ваги збуджуючих входів $w_i^{(n+1)} = w_i^{(n)} + \Delta_i$.
2. Якщо результат невірний, послабити ваги збуджуваних входів $w_i^{(n+1)} = w_i^{(n)} - \Delta_i$.
3. Значення ваг, які не вплинули на результат, не змінювати.
4. Якщо $y = 0$, то результат не змінювати.

Приклад. Нехай в множині $\{x_1, x_2\}$ дві точки $\{1,0\}$ та $\{1,1\}$ належать до області A ($y = 1$), а точки $\{0,1\}$ та $\{0,0\}$ – до області B ($y = 0$) (рис. 6.3).

Нехай початкові значення $w_1 = 1$; $w_2 = 1$; $w_0 = 0,5$. Тоді границя між областями A та B має вигляд прямої a , для якої

$$w_1 \times x_1 = -w_2 \times x_2 + w_0 \times 0,5 = -x_2 + 0,5.$$

Нехай крок $\Delta = 0,2$. Усі значення ваг w_i в нерівності

$$w_1 \times x_1 + w_2 \times x_2 - w_0 \times 0,5 > 0$$

відповідають $y = 1$, а усі значення

$$w_1 \times x_1 + w_2 \times x_2 - w_0 \times 0,5 < 0$$

відповідають $y = 0$. З рис.6.3 видно, що при початковому розташуванні прямої a точку $\{0,1\}$ внесено до області A , в той час як вона повинна належати області B . Навчання класифікатора будемо проводити, подаючи точки навчальної множини (вхідні сигнали) у наступному порядку: $\{1,0\}$, $\{1,1\}$, $\{0,0\}$, $\{0,1\}$.

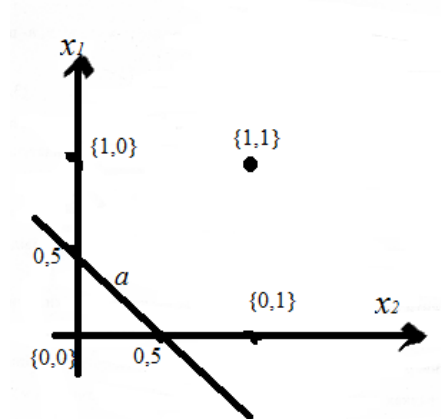


Рис. 6.3

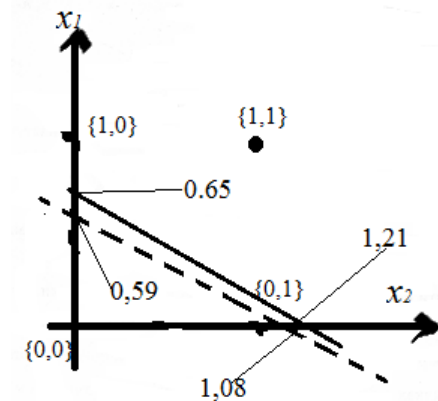


Рис.6.4

Сигнал $x_0 = -1$ для кожної пари вхідних сигналів є незмінним. Результати ітерацій навчання наведено в табл.6.1.

Таблиця 6.1.

Ітер.	крок	x_1	x_2	w_1	w_2	w_0	$\leq 0?$	$y = ?$	Вірно або невірно	$w_1 +$ – Δ	w_2 + – Δ	w_0 + – Δ
1.	1	1	0	1	1	0,5	> 0	1	вірно	1,2	1	0,7
	2	1	1	1,2	1	0,7	> 0	1	вірно	1,4	1,2	0,9
	3	0	0	1,4	1,2	0,9	< 0	0	вірно	1,4	1,2	0,9
	4	0	1	1,4	1,2	0,9	> 0	1	невірно	1,4	1,0	0,7
2.	1	1	0	1,4	1,0	0,7	> 0	1	вірно	1,6	1,0	0,9
	2	1	1	1,6	1,0	0,9	> 0	1	вірно	1,8	1,2	1,1
	3	0	0	1,8	1,2	1,1	< 0	0	вірно	1,8	1,2	1,1
	4	0	1	1,8	1,2	1,1	> 0	1	невірно	1,8	1,0	0,9
3.	1	1	0	1,8	1,0	0,9	> 0	1	вірно	2,0	1,0	1,1
	2	1	1	2,0	1,0	1,1	> 0	1	вірно	2,2	1,2	1,3
	3	0	0	2,2	1,2	1,3	< 0	0	вірно	2,2	1,2	1,3
	4	0	1	2,2	1,2	1,3	< 0	0	вірно	2,2	1,2	1,3
4.	1	1	0	2,2	1,2	1,3	> 0	1	вірно	2,4	1,2	1,5
	2	1	1	2,4	1,2	1,5	> 0	1	вірно	2,6	1,4	1,7
	3	0	0	2,6	1,4	1,7	< 0	0	вірно	2,6	1,4	1,7
	4	0	1	2,6	1,4	1,7	< 0	0	вірно	2,6	1,4	1,7

Ітерації можна продовжити, але вже третя та четверта дають вірні результати для всієї навчальної множини чисел $\{0,0\}$, $\{0,1\}$, $\{1,0\}$, $\{1,1\}$. Графік прямої ($x_1 = -0,538462 \times x_2 + 0,653846$), що розділяє площину на дві області A , B , наведено на рис.6.4 неперервною лінією, а для прямої після третьої ітерації ($x_1 = -0,545455 \times x_2 + 0,590909$) – на рис.6.4 – штриховою лінією. Ясно, що таких прямих в даній задачі може бути нескінченна кількість. Додамо, що швидкість навчання (в чому можна впевнитися власноручно на розглянутому прикладі) залежить від вибору кроку Δ . У загальному випадку довільних значень векторів навчальної множини швидкість навчання буде також залежати від величини (розкиду) цих значень. Тому у цьому загальному випадку можна використовувати алгоритм навчання к вигляді

$$w_i^{(n+1)} = w_i^{(n)} + \mu \times (y_d - y) \times x_i, \quad (6.11)$$

де y – одержане при розрахунку значення класифікатора (в розглянутому випадку це 0 або 1), а y_d – значення класифікатора, яке відповідає дійсній класифікації сигналу (еталону) навчальної множини x_i ; n та $(n+1)$ – номери ітерацій; μ – ваговий коефіцієнт, який впливає на швидкість ітераційного процесу.

Ітераційну процедуру навчання можна записати для вектора сигналів навчальної множини $\bar{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$ у вигляді

$$\bar{W}^{(n+1)} = \bar{W}^{(n)} + \mu \times (y_d - y) \times \bar{X}. \quad (6.12)$$

На відміну від алгоритму Гебба навчання за формулою (6.12) не проводиться, якщо результат вірний ($y_d = y$), і всі ваги \bar{W} змінюються, якщо результат невірний.

Слід також зауважити, що, оскільки один нейрон здатен створити границю у вигляді гіперплощини (в наведеному прикладі – у вигляді прямої), то за допомогою одного нейрону не можна провести класифікацію, коли границя між класами A та B може бути представлена кривою гіперповерхнею.

6.3.2.2. Алгоритм Відроу (Widrow)

Цікавий алгоритм навчання нейрону зі входами, на які подають дійсні числа (сигнали), а вихід якого булевий, запропонував Відроу. Для цього алгоритму у випадку, коли класифікація вектора \bar{X} вірна, не потрібні жодні зміни \bar{W} . Якщо ж класифікація невірна, то це означає, що невірно класифікована точка \bar{X} лежить в просторі вхідних векторів на невідповідному боці роздільної площини і його відстань β від цієї площини

$$\beta = \bar{W}^T \times \bar{X} / \|\bar{W}_0\| \quad (6.13)$$

слід вважати складовою класифікаційної похибки. Тут $\|\bar{W}_0\|$ – норма вектора \bar{W} .

Для оптимізації критерієм вірності навчання класифікатора в алгоритмі обирають суму E відстаней всіх помилково класифікованих векторів з навчальної множини для певного постійного («миттєвого») значення вектора ваг \bar{W} . Нормування значенням $\|\bar{W}_0\|$ можна відкинути, оскільки навчання полягає у зведенні значення E до нуля

$$E(\bar{W}) = \sum_k |\bar{W}^T \times \bar{X}|, \quad (6.14)$$

де k – кількість хибно оцінених векторів \bar{X} з навчальної множини.

Цей критерій записати у вигляді

$$E(\bar{W}) = \sum_k \bar{W}^T \times (\pm \bar{X}) = \sum_k \sum_{i=1}^N (\pm w_i \times x_i), \quad (6.15)$$

де знак мінус відповідає помилковій позитивній класифікації (6.13), а знак плюс – помилковій негативній.

Градiєнт (для ітераційної процедури) критерію $E(\bar{W})$ має вигляд

$$\nabla E(\bar{W}) = \sum_{i=1}^N (\partial E / \partial w_i) \times j_i = \sum_k (\pm [\sum_{i=1}^N x_i \times j_i]) = \sum_k (\pm \bar{X}). \quad (6.16)$$

В (6.16) j_i – це одиничний вектор у напрямку осі i -ї змінної x_i в $(N+1)$ -вимірному просторі навчальних векторів. Таким чином, градієнт дорівнює алгебраїчній сумі усіх помилково класифікованих векторів.

Для мінімізації помилки використовують ітераційну процедуру згідно з формулою

$$\bar{W}^{(n+1)} = \bar{W}^{(n)} - \mu \times \nabla E(\bar{W}^{(n)}). \quad (6.17)$$

Після класифікації нейроном з наданими вагами усіх навчальних векторів (**епоха навчання**) обчислюють градієнт помилок $\nabla E(\bar{W})$ і за формулою (6.17) підстроюють вектор ваг \bar{W} . Ця ітераційна процедура закінчується, коли помилка (6.15) стає меншою наперед заданої малої величини.

6.4. Односпрямовані нейронні мережі

6.4.1. Архітектура односпрямованих нейронних мереж

Найпростішою нейронною мережею є односпрямований перцептрон (рис.6.5). Як видно з рис.6.5., мова йде про M нейронів, які працюють паралельно і незалежно один від одного реалізують перетворення вектора вхідних даних \bar{X} в залежності від свого вектора ваг \bar{W} , тобто

$$y_j = f(\bar{W}_j^T \times \bar{X}). \quad (6.18)$$

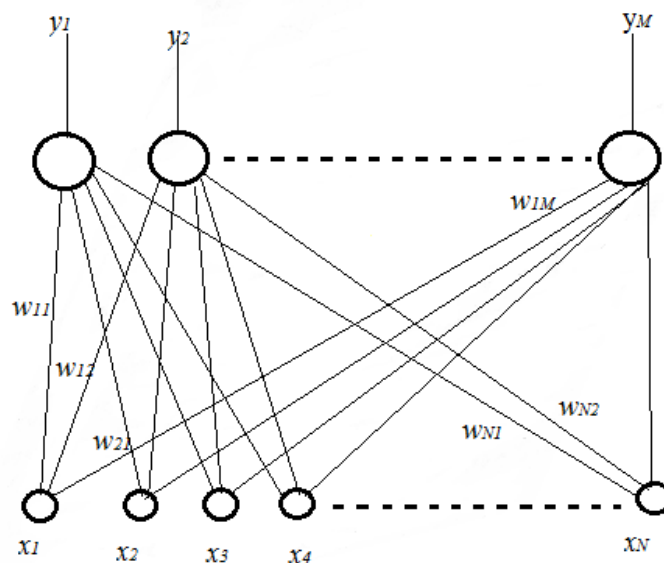


Рис.6.5.

Характеристики $f(\alpha)$ нейронів однієї мережі часто бувають подібними. Тому нейронну мережу (рис.6.5) можна розглядати як таку, що реалізує відображення з простору N змінних до простору M змінних.

Перед розглядом загальної структури багатошарової односпрямованої мережі наведемо приклад мережі з певними, наданими заздалегідь вагами, яку можна використовувати як спеціалізований паралельний процесор. Мова йде про мережу Хеммінга, яка оцінює відповідність одного сигналу $(N$ -

вимірного базового вектору) до одного з M тестових сигналів і допомагає вибрати найближчий, оцінивши при цьому чисельно міру подібності. Коло, зображене на рис.6.6, складається з двох частин (шарів). Першим є одношаровий перцептрон, утворений M лінійними нейронами, вектори ваг яких \bar{W}_j бінарні, розміру N , і які представляють задані тестові бінарні сигнали. Якщо порогова кожного нейрону N , то характеристика кожного нейрону

$$y = f(\alpha) = \alpha/2,$$

а вихід j -го нейрону, збудженого вхідним бінарним сигналом \bar{X}_p , має вигляд

$$y_{pj} = (1/2) \times (\sum_{i=1}^N w_{ij} \times x_{ip} + N).$$

Якщо бінарні елементи вектору ваг \bar{W} та вхідного сигналу \bar{X} будуть представлені числами ± 1 , то в разі співпадіння кодів і ваг сигнал на виході нейрону буде дорівнювати N . Якщо співпадіння буде неповним, то обраховують Хеммінгову відстань між векторами \bar{X} та \bar{W} у вигляді

$$N - y_{pj} = \Delta H.$$

Друга частина мережі (другий шар) призначена для вибору максимуму серед відгуків y_{pj} для усіх $j = 1, 2, \dots, M$, тобто

$$z = \max [y_{1p} \quad y_{2p} \quad \dots \quad y_{Mp}].$$

Крім того є M бінарних виходів, які інформують, який з вхідних дискретних сигналів був найближчим до еталону.

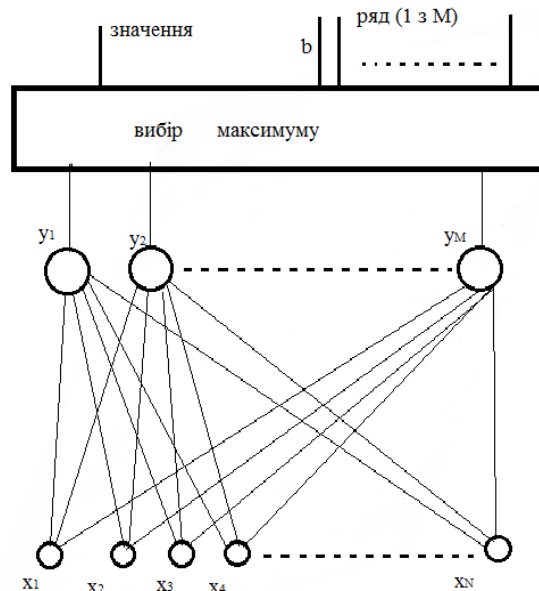


Рис.6.6

Основним елементом цього шару перцептрон є коло виду рис. 6.7,а, в якому використано три типи нейронів:

1. А – має лінійну характеристику $z = \alpha$;

2. В – обмежувач від’ємних значень, тобто $z = \alpha$ для $\alpha \geq 0$; $z = 0$ для $\alpha < 0$;

3. С – логічні нейрони з бульовим виходом, які мають нульовий поріг. Можна впевнитися, що коло рис. 6.7,а передасть на вихід v більшу з вхідних величин. Крім того, на одному з виходів (b_1, b_2) з’явиться сигнал 1, якщо номер цього входу дорівнює номеру входу (з u_1, u_2), на який подано більший сигнал.

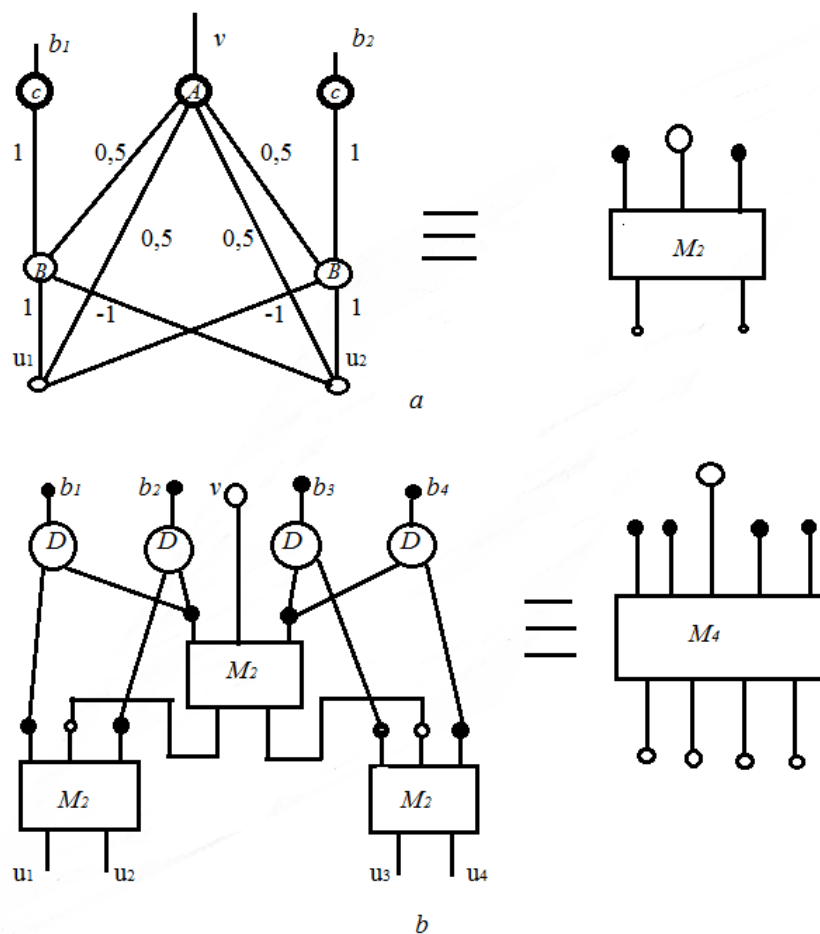


Рис.6.7.

Таким чином, на виході b_i кола рис.6.7, а буде розраховано, якій зі входів i мав більше значення (u_i) і що це за значення (вихід v).

Розглянемо приклад. Нехай на вхід u_1 подане значення $u_1 = 1$, а на вхід u_2 – 2,5. Тоді на нейрон B_1 (ліворуч) прийде сигнал $1 - 2,5 = -1,5 < 0$, а на нейрон B_2 (праворуч) – сигнал $2,5 - 1 = 1,5 > 0$.

Значення 1,5 подається на вхід нейрону C_2 , що дає на його виході 1, а на виході C_1 (на його вході нуль) одержимо нуль.

На вхід нейрону A зі входу u_1 надходить 0,5, а з виходу B_1 – нуль. Зі входу u_2 надходить 1,25, а з виходу B_2 – 0,75. Разом на виході нейрону A

одержимо 2,5, тобто найбільший з сигналів. Коло на рис.6.7, а (ліворуч) звичайно позначають значком $M2$ (праворуч).

Якщо тепер ввести нейрони D , які реалізують операції логічного множення (кон'юнкції), то з трьох елементів $M2$ і чотирьох нейронів D можна побудувати елемент $M4$, тобто шар для оцінки чотирьох сигналів різного рівня (рис.6.7, б). Аналогічно можна побудувати (на двох елементах $M4$, одному $M2$ і нейронах D) елемент $M8$ і т.д.

6.4.2. Класифікаційні можливості односпрямованих багат шарових перцептронів

В найпростішому випадку мережі з двома входами ($N = 2$) і єдиним бінарним виходом можна проілюструвати обмеження одношарового перцептрона та розширення його можливостей при збільшенні кількості шарів. Вхідні вектори (навчальної множини та множини, що підлягає класифікації) можна інтерпретувати як позиції точок в площині x_1, x_2 . В цій площині надано дві можливі множини точок A, B , а вхідний вектор повинен бути класифікований до одного з цих класів. На рис. 6.8 показано класифікацію одним нейроном (тобто одношаровим перцептроном, який класифікує вхідний вектор, причому одиниця на виході, наприклад, відповідає області B , а нуль – області A).

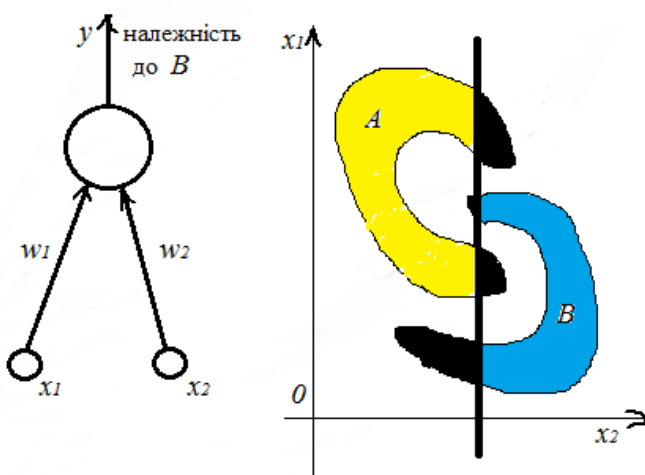


Рис.6. 8

Як видно з рис.6.8 (праворуч) точна класифікація таким нейроном неможлива. Навіть при оптимальному розташуванні прямої лінії залишаються області (виділені чорним), які будуть класифіковані помилково. Збільшення кількості нейронів того самого шару приведе до збільшення ліній, які ділять площину x_1, x_2 на дві частини. Щоб обрати співпадіння цих на півплощин (при різних границях, які забезпечують два або три нейрони

одного шару) необхідно задати ще один шар співпадіння двох на півплощин) або ще два шари (спів падіння областей з трьох різних пар на півплощин) нейронів (рис. 6.9, рис.6.10 відповідно).

На рис. 6.9, рис.6.10 другий шар реалізує логічну операцію кон'юнкції («і»), а третій шар (рис.6.10) реалізує операцію диз'юнкції «або». Подальше об'єднання областей (у багатовимірному випадку) може бути знову реалізоване кон'юнкцією та диз'юнкцією.

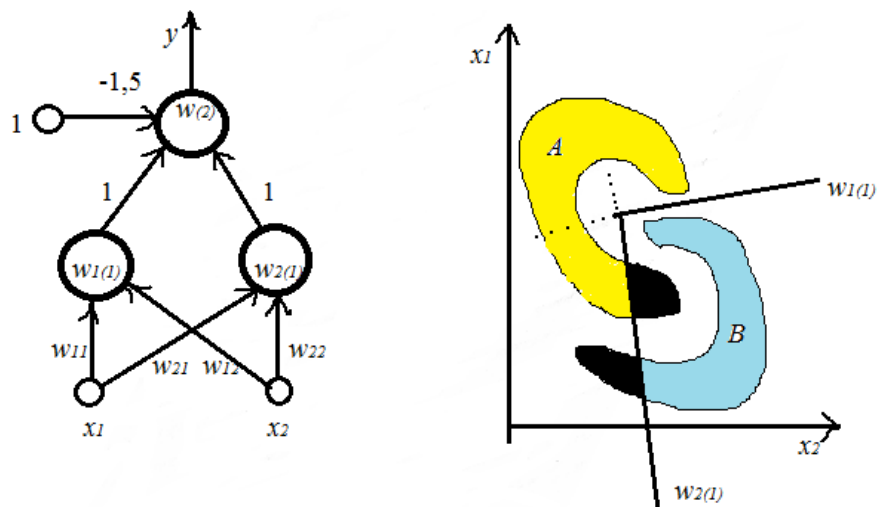


Рис.6.9

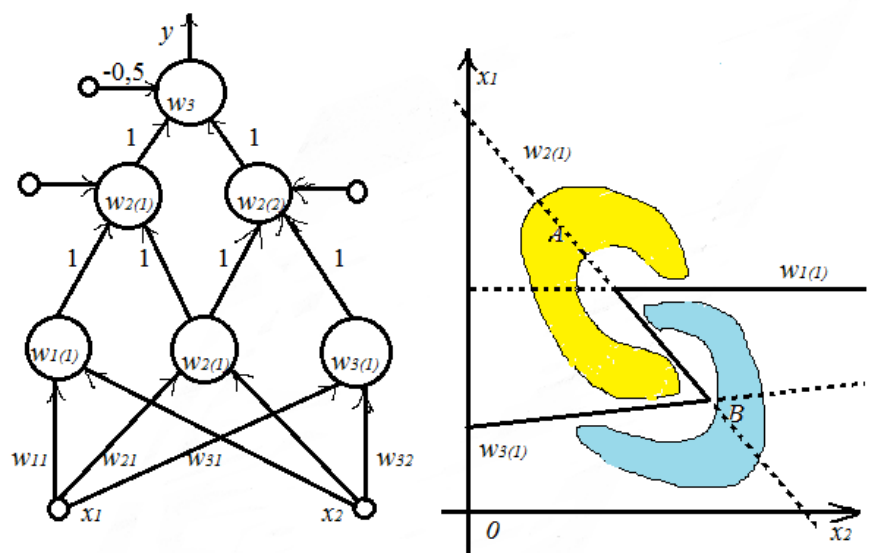


Рис.6.10.

6.5. Навчання мережі зворотним поширенням похибок

Розглянутий вище частковий випадок перцептрону можна узагальнити на багатошаровий багатовимірний перцептрон (рис.6.11).

Позначимо ваги зв'язків w наступним чином: $w^{(n)}$ буде означати, що це ваги на вході n -го шару нейронів; $w_{ik}^{(n)}$ – що цю вагу підімкнено до i -го нейрону з k -го нейрону. Під час навчання ваги змінюються.

Односпрямовані мережі знайшли широке застосування в розв'язанні різноманітних задач саме завдяки тому, що для них існує формалізований оптимальний метод навчання. Для навчання використовують навчальні множини, утворені певною (достатньо великою) кількістю пар (\bar{X}_p, \bar{d}_p) , де \bar{X}_p – певний вхідний вектор розміру N

$$\bar{X}_p = [x_{1p} \quad x_{2p} \quad \dots \quad x_{Np}]^T,$$

а \bar{d}_p – відповідний (бажаний, необхідний) вектор розміру M

$$\bar{d}_p = [d_{1p} \quad d_{2p} \quad \dots \quad d_{Mp}]^T$$

на виході мережі. Поодиноким кроком навчання полягає в тому, що на вхід мережі подається вектор \bar{X}_p , для якого відоме значення \bar{d}_p . На виході мережі одержують не \bar{d}_p , а M -розмірний вектор $\bar{Y}_p = [y_{d1} \quad y_{d2} \quad \dots \quad y_{dM}]^T$, значення якого пов'язане з архітектурою та вагами мережі і вхідним сигналом \bar{X}_p , тобто

$$\bar{Y}_p = \bar{\psi}(\bar{X}_p). \quad (6.19)$$

Існуючі відхилення (малі або великі) вектора \bar{Y}_p від \bar{d}_p мінімізують за допомогою підстроювання ваг $w_{ik}^{(n)}$ або в поодиноких кроках для інтегрованими результатами для декількох пар векторів, або за епоху в цілому. **Епохою** навчання називають поступове крок за кроком навчання для кожної p пар навчальної множини. Оскільки сходимість сукупності ваг до стану, коли мережа вже реалізує бажане перетворення $\bar{\psi}$ дуже повільна, звичайно навчання потребує багато навчальних епох для досягнення певної малої похибки перетворення.

Спочатку розглянемо основні ідеї, які призводять до формування алгоритму зворотного поширення похибок. Оберемо спосіб навчання, який вже був розглянутий вище (δ -правило (6.17)) для поодинокого нейрону, і будемо його використовувати для навчання всієї мережі.

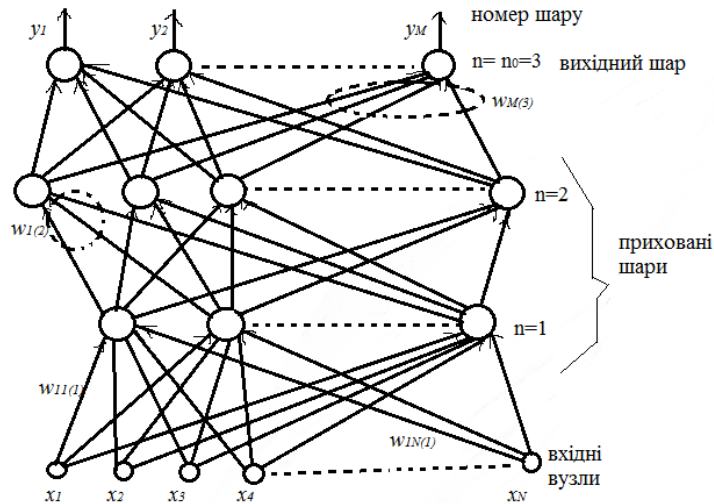


Рис.6.11.

Якщо мережа має n_0 шарів, то при наданні на вхід навчального вектору \bar{X}_p , похибка поодинокого j -го виходу мережі має вигляд

$$e_{pj}^{(n_0)} = d_{pj} - y_{pj}.$$

Але ця похибка є результатом накопичення похибок різних нейронів в різних (внутрішніх) шарах, і, щоб розподілити цю похибку по шарах слід було б знати її проміжні значення як для y_{pj} , так і d_{pj} для прихованих (внутрішніх) шарів. Але це не може бути відомо, оскільки не відомі бажані значення сигналів на входах нейронів в прихованих шарах. Тому будемо вважати, що результуюча похибка $e_{pj}^{(n)}$ j -го нейрону в шарі n виникає внаслідок похибок усіх нейронів попереднього шару ($n - 1$) пропорційно до ваг w зв'язків цих нейронів з j -м нейроном n -го шару. Тоді для похибки i -го нейрону ($n - 1$)-го шару отримаємо

$$e_{pi}^{(n-1)} \cong \sum_{j=1}^{N_n} e_{pj}^{(n)} \times w_{ij}^{(n)}. \quad (6.20)$$

Якщо похибка з виходу кожного (одного) нейрону може бути розподілена на усі нейрони попереднього шару, то те саме вірно і для шару під цим нейроном. І так до самого першого шару.

Цю процедуру і названо зворотним поширенням похибки, що дало назву і самому методу.

Підстроювання ваг на кожному кроці навчання можна проводити за наступним алгоритмом:

1. подати навчальний вектор \bar{X}_p на вхід мережі та обчислити (або одержати на фізичному пристрої) реакцію \bar{Y}_p ;

2. обчислити вектор похибок $\bar{e}_p = \bar{D}_p - \bar{Y}_p$, тобто результуючі похибки для кожного з вихідних нейронів;

3. розподілити похибки кожного нейронів на виході мережі на усі нейрони попередніх шарів **за процедурою зворотного поширення похибки**;

4. підстроїти вектори ваг кожного поодинокого нейрону за δ -правилом з використанням збудження цього нейрону подачею на мережу сигналу \bar{X}_p .

Враховуючи важливість цього алгоритму у сучасній практиці навчання односпрямованої мережі, розглянемо процедуру ітераційної корекції ваг більш детально.

Для спрощення ілюстрації будемо розглядати мережу з двох шарів (тобто з одним прихованим шаром), з чого витікає $n_0=2$. При наявності більшої кількості шарів узагальнення легко зробити методом математичної індукції.

Нехай усі нейрони мають функцію сигмоїдального виду

$$f(\alpha) = (1 + e^{-\alpha/\tau})^{-1} = (1 + \exp((\theta - \sum_{i=1}^N w_i \times x_i)/\tau))^{-1}. \quad (6.21)$$

Активацию (характеристику) j -го нейрону в n -му шарі при підключенні вектору \bar{X}_p будемо позначати як $\alpha_{pj}^{(n)}$, а i -ту складову вектора ваг $\bar{W}_j^{(n)}$ цього нейрону як $w_{ji}^{(n)}$. Задачу навчання будемо розглядати як адаптацію, спрямовану до мінімізації значення довжини різницевого вектора \bar{e}_p .

Односпрямована мережа (багат шаровий перцептрон) реалізує відображення $\bar{Y} = \psi(\bar{X})$, тоді на кожному кроці навчання для вектора \bar{X}_p

$$\bar{Y}_p = \bar{\psi}(\bar{X}_p). \quad (6.22)$$

Вектор похибки має вигляд

$$\bar{e}_p = \bar{D}_p - \bar{Y}_p = \bar{D}_p - \bar{\psi}(\bar{X}_p). \quad (6.23)$$

Миттєва квадратична похибка має вигляд

$$\varepsilon_p = \bar{e}_p^T \times \bar{e}_p = \sum_{j=1}^N (d_{jp} - y_{jp})^2 \quad (6.24)$$

Для усіх навчальних пар множин сукупна похибка

$$\varepsilon = \|\varepsilon_p\|. \quad (6.25)$$

Цю похибку можна мінімізувати корекцією ваг усієї мережі $\{w_{ji}^{(n)}\}$, які утворюють вектор \bar{W} .

Мінімізацію похибки можна здійснити методом найшвидшого спуску

$$\bar{W}(s+1) = \bar{W}(s) - \mu_s \times \nabla \varepsilon. \quad (6.26)$$

Більш детально (для кожної зі складових) формулу (6.26) можна записати у вигляді

$$w_{ji}^{(n)}(s+1) = w_{ji}^{(n)}(s) - \mu_s \times \left(\partial \varepsilon / \partial w_{ji}^{(n)} \right) \quad (6.27)$$

при $w_{ji}^{(n)} = w_{ji}^{(n)}(s)$. Тут s означає крок ітерації.

В процесі навчання замість середньої похибки будемо використовувати її «миттєве» значення $\varepsilon_p \approx \varepsilon$. Враховуючи, що

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p(f(\alpha_{jp}^{(n)}(\alpha_{j1}^{(n)}, \alpha_{j2}^{(n)}, \dots)), \dots), \text{ одержимо} \\ -\mu_s \times (\partial \varepsilon / \partial w_{ji}^{(n)}) = -\mu_s \times (\partial \varepsilon_p / \partial w_{ji}^{(n)}) = -\mu_s \times (\partial \varepsilon_p / \partial f(\alpha_{jp}^{(n)})) \times (\partial f(\alpha_{jp}^{(n)}) / \partial \alpha_{jp}^{(n)}) \times (\partial \alpha_{jp}^{(n)} / \partial w_{ji}^{(n)}). \quad (6.28)$$

Відзначимо, що вплив виходу $y_{jp}^{(n)} = f(\alpha_{jp}^{(n)})$ на ε_p може бути визначений ще й подальшими нейронами (як це буде видно далі).

Вираз (6.28) розглянемо більш детально спочатку для нейронів останнього шару, тобто для $n = 2$. Якщо для обчислення похідних візьмемо до уваги квадратичний вираз (6.24), в якому лише один член залежить від виходу нейрону $y_{jp}^{(2)} = f(\alpha_{jp}^{(2)})$, то подальший множник в похідній (похідну від відомої функції (6.21)) обчислимо в символьному вигляді. При обчисленні останнього множника врахуємо, що в (6.8) від $w_{ji}^{(2)}$ залежить лише та складова, яка є добутком цієї ваги і вхідного сигналу на цій гілці (цей сигнал є вихідним для нейрону в першому шарі $y_{ip}^{(1)} = f(\alpha_{ip}^{(1)})$). Враховуючи сказане вище, можна записати

$$-\mu_s \times (\partial \varepsilon / \partial w_{ji}^{(2)}) \approx 2\mu_s \times (d_{jp} - f(\alpha_{jp}^{(2)})) \times f'(\alpha_{jp}^{(2)}) \times f(\alpha_{ip}^{(1)}) = 2\mu_s \times f'(\alpha_{jp}^{(2)}) \times e_{jp}^{(2)} \times y_{ip}^{(1)}. \quad (6.29)$$

Тоді у векторному вигляді для усіх ваг j -го нейрону на базі (6.27) можна записати

$$\bar{W}_j^{(2)}(s+1) = \bar{W}_j^{(2)}(s) + 2\mu_s \times f'(\alpha_{jp}^{(2)}) \times e_{jp}^{(2)} \times \bar{Y}_{ip}^{(1)}. \quad (6.30)$$

Для запису рівняння (6.28) першого шару слід урахувати, що внаслідок повного односпрямованого графу вихід одного нейрону першого шару впливає на всі нейрони вихідного (другого) шару, а також і на усі їх виходи. Таким чином, якщо ε_p надане виразом (6.24), то вплив кожного виходу першого шару описує вираз

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p(f(\alpha_{1p}^{(2)}(y_{ip}^{(1)})), f(\alpha_{2p}^{(2)}(y_{ip}^{(1)})), \dots, f(\alpha_{mp}^{(2)}(y_{ip}^{(1)}))), \quad (6.31)$$

де $y_{ip}^{(1)} = f(\alpha_{ip}^{(1)})$.

Враховуючи відоме правило, якщо $g = g[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]$, а $x_i = x_i(s)$, то вірно, що $dg/ds = \sum_{i=1}^m ((\partial g / \partial x_i) \times (\partial x_i / \partial s))$, отримаємо

$$\partial \varepsilon_p / \partial f(\alpha_{ip}^{(1)}) = \sum_{j=1}^M ((\partial \varepsilon_p / \partial \alpha_{jp}^{(2)}) \times (\partial \alpha_{jp}^{(2)} / \partial y_{ip}^{(1)})) = \sum_{j=1}^M (\partial (d_{jp} - y_{jp})^2 / \partial \alpha_{jp}^{(2)}) \times w_{ji}^{(2)}, \quad (6.32)$$

оскільки в (6.24) тільки відхилення на j -го виходу мережі залежить від активації $\alpha_{jp}^{(2)}$. Подальші перетворення (6.32) дають наступний результат

$$\begin{aligned} \partial \varepsilon_p / \partial f(\alpha_{ip}^{(1)}) &= \sum_{j=1}^M \left(\partial (d_{jp} - f(\alpha_{jp}^{(2)}))^2 / \partial \alpha_{jp}^{(2)} \right) \times w_{ji}^{(2)} = \\ &= \sum_{j=1}^M \left(\left(\partial (d_{jp} - f(\alpha_{jp}^{(2)}))^2 / \partial f(\alpha_{jp}^{(2)}) \right) \times \left(\partial f(\alpha_{jp}^{(2)}) / \partial \alpha_{jp}^{(2)} \right) \times w_{ji}^{(2)} \right) = \\ &= -2 \sum_{j=1}^M ((d_{jp} - f(\alpha_{jp}^{(2)})) \times f'(\alpha_{jp}^{(2)}) \times w_{ji}^{(2)}) = \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$-2 \sum_{j=1}^M (e_{jp}^{(2)} \times f'(\alpha_{jp}^{(2)}) \times w_{ji}^{(2)}).$$

Після підставлення (6.33) в (6.28) отримаємо

$$-\mu_s \times (\partial \varepsilon / \partial w_{ik}^{(1)}) \approx -\mu_s \times (\partial \varepsilon_p / \partial w_{ik}^{(1)}) = 2\mu \sum_{j=1}^M (e_{jp}^{(2)} \times f'(\alpha_{jp}^{(2)}) \times w_{ji}^{(2)}) \times f'(\alpha_{jp}^{(1)}) \times x_{kp}. \quad (6.34)$$

Для забезпечення подібності з δ -правилом (6.29) позначимо суму в (6.34) як похибку, перетворену з виходу мережі на вихід j -го нейрону першого шару

$$e_{ip}^{(1)} = \sum_{j=1}^M (e_{jp}^{(2)} \times f'(\alpha_{jp}^{(2)}) \times w_{ji}^{(2)}). \quad (6.35)$$

Тоді для кожної ваги

$$\bar{W}_i^{(1)}(s+1) = \bar{W}_i^{(1)}(s) + 2\mu_s \times f'(\alpha_{ip}^{(1)}) \times e_{ip}^{(1)} \times \bar{X}_p. \quad (6.36)$$

Виходячи з того, що вирази для корекції ваг містять похідні від характеристик нейронів, ці характеристики повинні бути гладкими та монотонними. Сигмоїдальні характеристики відповідають цим вимогам. Тому вони є найуживанішими. Наведені алгоритми в мережах з пороговими характеристиками використовувати неможна.

Навчанням на навчальній множині ваги змінюються так, що мережа апроксимує бажане перетворення. При цьому для характеристики властивостей мережі, визначених задачею, для визначення міри наближення властивостей до бажаних використовують поняття **продуктивності мережі**. В класифікаційних задачах **продуктивність** однозначно визначена відносною кількістю вірних розв'язків. Для простих задач апроксимації – середньоквадратичним відхиленням результату у порівнянні до точних значень, а в більш складних багатовимірних апроксимаціях, наприклад, середньою довжиною вектору похибки або середнім кутовим відхиленням бажаного і дійсного векторів тощо. Середнє значення слід оцінювати за достатньо велику кількість останніх випробувань, щоб обмежити вплив розкиду результатів, наприклад, за останню епоху навчання. Типовий характер продуктивності мережі наведено на рис.6.12 (більш тонкою лінією).



Рис.6.12

Спочатку продуктивність достатньо швидко зростає, але після певної кількості навчальних кроків уповільнюється і стає незмінною (так зване плато продуктивності). Якщо ж навчання тією ж навчальною множиною продовжується достатньо довго, то продуктивність може почати знову зростати, поки не досягне оптимального значення.

Навчальна множина завжди (виходячи з практичних резонів) є обмеженою і представляє бажане перетворення, яке мережа повинна реалізувати, але за допомогою лише вибраних (наданих) дискретних значень, які в процесі навчання багатократно повторюються. Загальноприйнята практика навчання передбачає навчання в рамці однієї епохи використання усіх навчальних дискретних значень (до того ж в кожній епосі в тому самому порядку слідування). Виходячи з відносно невисокої ефективності навчання завжди потрібно використовувати багато епох. Мережа може також обробляти і не навчальні вектори, при чому існує вимога до певного узагальнення навчених «знань». Це означає, що вхідні вектори, які мало відрізняються від навчальних, викликали мало відмінні реакції мережі. Так, наприклад, при навчанні повинні використовуватися вектори, які мають «дефекти» в наслідок їх часткового спотворення шумом і т. ін. Тільки продуктивність мережі відносно множини тестових сигналів (тобто таких, що не входять в навчальну множину) може бути мірою її ефективності. Якщо мережу тестувати навчальними парами, що не належали до навчальної множини, але з відомими відповідями, хід кривої для продуктивності мережі буде відрізнятися від описаного вище (більш жирна крива на рис. 6.12). Спочатку ця крива відповідає ходу кривої, побудованої виключно для навчальної множини (більш тонка крива), А потім (після досягнення горизонтальної ділянки) починає спадати (в місці, де перша крива знову починає зростати). Цей феномен ілюструє **«перетренування»** або **«перенавчання»** мережі.

Якщо зростаюча ділянка характеризує «засвоєння» мережею головних властивостей («рис») перетворення, які роблять можливими узагальнення, досягнення плато свідчить про вичерпання засвоєння загальних властивостей. Подальше зростання (тонка крива) характеризує засвоєння детальних специфічних властивостей поодиноких елементів навчальної множини, до яких мережа продовжує адаптуватися. Але це протирічить узагальненню, оскільки такі детальні властивості не є суттєвою, характерною інформацією перетворення, а скоріше є несуттєвими деталями. Така «перетренована» мережа, в якій, наприклад, поодинокі нейрони будуть налаштовані на певні дискретні пари навчальної множини, втратять здатність

до узагальнення в тому сенсі, що незначне відхилення приведе до невірної перетворення. Мережа в цьому випадку має лише пам'ять без «інтелекту».

Найпростішим методом боротьби з «перетренуванням» є своєчасне закінчення навчання, тобто тоді, коли продуктивність перестане помітно зростати. Іншим шляхом є незначним чином спотворити навчальні вектори випадковим шумом, що зробить неможливою адаптацію до несуттєвих деталей, але ці спотворення не можуть носити систематичний характер, або бути настільки великими, щоб утворилося хибне перетворення. Нарешті, найбільш елегантним методом боротьби з «перетренуванням» є утворення в мережі «вузького місця», яке не дозволить утворитися внутрішньому відображенню непотрібних деталей. В односпрямованих мережах цього легко можна досягти тим, що один з прихованих шарів нейрону буде утворено малою кількістю нейронів. Тоді множина інформації, що буде переноситися через цей шар, буде обмеженою. Вважають, що мережа може утворити таку внутрішню структуру, що у «вузькому місці» переноситься лише найважливіша інформація.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. — М.: Техносфера, 2005. — 1072 с. — ISBN 5-94836-028-8.
2. Alessio. Digital Signal Processing and Spectral Analysis for Scientists / Alessio, Silvia Maria. Springer. — 2016. — 200 p. — ISBN 978-3-319-25468-5.
3. Walek Petr. Analýza biomedicínských obrazů / Petr Walek, Martin Lamos, Jiri Jan / Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT v Brně. — 2013. 141 p.
4. Dougherty G. Digital Image Processing for Medical Applications / Geoff Dougherty — 2009. — 462 P. — ISBN 0-521-86085-7.
5. А. Оппенгейм, Р. Шафер. Цифровая обработка сигналов / Издательство «Техносфера», Москва, 2006. — 856 с.
6. Айфичер Ёммануил С., Джервис Барри У. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание: Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. — 992 с.: ил. — Парал. тит. англ.
7. Основи теорії кіл. Ч.2. Підручник для студентів ВНЗ / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін / За загальною редакцією В.М. Шокала та В.І. Правди.— Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2006, 668с.
8. Основи теорії кіл: Підручник для студентів вищих навчальних закладів.Ч.2. / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін / За загальною редакцією В.М. Шокала та В.І. Правди.— Харків, ТОВ «Компанія СМІТ», 2008, 560с.
9. Рыбин А.И. Алгоритм условной деконволюции в частотной области / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2000.— №6.— С. 51 — 55 (Изв. вузов).
- 10.Рибін О.І. Реставрація образів методом умовної деконволюції в області просторових частот / О.І. Рибін, В.Ю. Корольов // Вісник Технічного університету Поділля.— 2000.— С.145 — 147.
- 11.Рыбин А.И. Реставрация образов в частотной области методом взвешенной фильтрации / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2001.— №4.— С. 51 — 56 (Изв. вузов).
- 12.Макаренко А.С. Реставрация образов методом частотной коррекции с компенсацией реализации аддитивного шума / А.С. Макаренко, А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2001.— №7.— С. 50 — 57 (Изв. вузов).

-
13. Рыбин А.И. Восстановление изображения методом частотной коррекции с компенсацией реализации аддитивного шума и последующим аналитическим продолжением спектра / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Электроника и связь.— 2000.— №9.— С.69.— 71.
 14. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский // 1986.— М.: Радио и связь.— 512с.
 15. Зиновьев А.А. Введение в теорию сигналов и цепей / А.А. Зиновьев, Л.И. Филиппов // 1975.— М.: Высшая школа.— 264с.
 16. Физика визуализации изображений в медицине. Под ред. С. Уэбба.— М.: Мир, 1991, т.1.—408с., т.2—408с.
 17. Радіотехніка: Енциклопедичний навчальний довідник: Навч. посібник / За ред. Ю.Л. Мазора, Є.А. Мачуського, В.І. Правди.— К.: Вища школа, 1999.— 938с.
 18. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці. Підручник для ВНЗ/ Ю.І. Волощук // 2003.— т.2.— Х.: Компанія СМІТ.— 496с.
 19. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов/ Л. Рабинер, Б. Гоулд // 1978.— М.: Мир.—848с.
 20. Біомедичні сигнали та їх обробка (навчальний посібник з грифом МОН України) / В.Г. Абакумов, О.І. Рибін, О.В. Геранін, Й. Сватош, Ю.С. Синєкоп.— Київ, ТОО „ВЕК+”, 1997, 352 с.
 21. Ахмед Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов/ Н.Ахмед, К.Р. Рао / Пер. с англ. / Под ред. И. Б. Фоменко. — М.: Связь, 1980. — 248 с.
 22. Рыбин А.И. Алгоритм условной деконволюции в частотной области / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2000.— №6.— С. 51 — 55 (Изв. вузов)
 23. Рибін О.І. Реставрація образів методом умовної деконволюції в області просторових частот / О.І. Рибін, В.Ю. Корольов // Вісник Технічного університету Поділля.— 2000.— С.145 — 147.
 24. Рыбин А.И. Реставрация образов в частотной области методом взвешенной фильтрации / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2001.— №4.— С. 51 — 56 (Изв. вузов).
 25. Рыбин А. И. Нормализация дискретных ортогональных преобразований тестовым сигналом / А.И. Рыбин // Радиоэлектроника. — 2004.— №7. — С. 39 — 46. (Изв. высш. учеб. заведений).
 26. Рыбин А. И, Алгоритм подстройки дискретного ортогонального преобразования под тестовый сигнал / А.И. Рыбин, Е.Г. Григоренко //

-
- Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Приладобудування. – 2004.— №27. – С. 122 – 128.
- 27.Рибін О. І. Діагностичні можливості процедури нормалізації ортогональних функцій при аналізі пульсограм / О.І. Рибін, О.Б. Шарпан // Вісник ЖДТУ. Технічні науки – 2004. – т. 1.— №4. – С. 144 – 149.
- 28.Рибін О. І. Алгоритми формування матричних операторів дискретних ортогональних перетворень REX та Corex / О.І. Рибін, О.Б. Шарпан // Вісник ЖДТУ. – 2004. – т. 2.— №4(31). – С. 53 – 57.
- 29.Рибін О. І. Аналіз пульсограм на базі процедури нормалізації ортогональних перетворень REX / О.І. Рибін, О.Б. Шарпан, Т.В. Сакалош // Наукові вісті НТУУ “КПІ” – 2005.— №4. – С. 29 – 33.
- 30.Рыбин А. И. Коэффициенты трансформант нормализованных ортогональных преобразований и диагностика пульсограм / А.И. Рыбин, О.Б. Шарпан, Е.Г. Григоренко, Т.В. Сакалош // Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Приладобудування.— 2005. – Вип. 30. – С. 148 – 156.
- 31.Данилевська В. Г. Особливості і можливості діагностики з нормалізованим перетворенням Фур’є пульсового сигналу / В.Г. Данилевська, О.В. Луцук, О.І. Рибін, О.Б. Шарпан // Електроніка и связь – 2006.— №2. – С. 49 – 54.
- 32.Рибін О. І. Погоджена фільтрація на базі нормалізації ортогональних перетворень О.І. Рибін, В.Г. Данилевська // Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2007. – Вип. 35. – С. 15 – 20.
- 33.Рибін О.І. Погоджена фільтрація сигналів при зміні масштабу їх аргументів на базі нормалізованих вейвлет- функцій / О.І. Рибін, А.Д. Мельник // Вісник НТУУ»КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.— 2007.— №34.— С.18— 24.
- 34.Мельник А.Д. Нормалізація тестового сигналу зі збереженням еквідистантного кроку дискретизації / А.Д. Мельник, О.І. Рибін // Вісник НТУУ»КПІ» . Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування .— 2008.— 34.— С. 24— 29.
- 35.Мельник А.Д. Нормализация эталонного сигнала с постоянным шагом дискретизации / А.Д. Мельник, А.И. Рыбин // Радиоэлектроника — 2008.— №1.— С. 71 — 75 (Изв. вузов).
- 36.Рыбин А.И. Согласованная нормализованная фильтрация сигналов / А.И. Рыбин, А.Д. Мельник // Радиоэлектроника — 2008.— №2.— С. 77 — 78 (Изв. вузов).

-
37. Мельник А.Д. Согласованная вейвлет-фильтрация сигналов с измененным масштабом / А.И. Рыбин, А.Д. Мельник // Радиоэлектроника — 2008.— №3.— С. 76 — 80 (Изв. вузов).
38. Рибін О.І. Алгоритм формування матричного оператора дискретного нормального перетворення / О.І. Рибін, Ю.Х. Ніжебецька // Вісник НТУУ «КПІ» . Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування .— 2008.— №36.— С.19— 27.
39. Ніжебецька Ю.Х. Нормальне дискретне перетворення сигналу довільної форми / Ю.Х. Ніжебецька, О.І. Рибін, А.П. Ткачук, О.Б. Шарпан // Наукові вісті НУТУ «КПІ».— 2008.— №4.— С.34— 40.
40. Рибін О.І. Аутентифікація особи за динамічно введеним підписом з використанням нормального перетворення / О.І. Рибін, Ю.Х. Ніжебецька, А.М. Луцків // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування .— 2010.— №40.— С.26— 30.
41. Рыбин А.И. Анализ подобия и различия образов с использованием нормального ортогонального преобразования / А.И. Рыбин, Ю.Х. Нижебецкая // Радиоэлектроника — 2010.— №3.— С. 58 — 64 (Изв. вузов).
42. Рибін О.І. Погоджена фільтрація: класичний лінійний та нормальний фільтри / О.І. Рибін, Ю.Х. Ніжебецька // Вісник НТУУ «КПІ» . Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування .— 2010.— №41.— С.5 — 12